

PROGETTO DISTRETTUALE "SCUOLAINRETE" - Distretto 36°

Area Logico-Matematica

LE FRAZIONI

**MODULO DIDATTICO DA UTILIZZARE NEGLI ANNI-PONTE
(quinta elementare- prima media, terza media-primo superiore)**

ANNO SCOLASTICO 2001-2002

AVVERTENZA AI DOCENTI

Piuttosto che elaborare due distinti moduli, uno per ciascuno dei passaggi di livello scolastico, si è optato per la stesura di un unico modulo, anche al fine di realizzare un'ampia **uniformità** d'approccio (terminologia, concetti, attività).

Naturalmente l'uso del presente materiale sarà diverso, dipendentemente dalla classe d'appartenenza degli alunni. Si ritiene, infatti, che per alunni di quinta elementare e terza media, il percorso debba iniziare dall'Unità A, per poi procedere secondo l'ordine proposto, scegliendo in ogni Unità didattica attività adeguate alle capacità cognitive degli alunni.

Nell'utilizzo del modulo nelle classi terze della scuola media inferiore e nelle prime superiori l'insegnante può, invece, procedere rapidamente per l'Unità A e l'Unità B, insistendo maggiormente sulle unità successive. Il livello degli esercizi e delle attività proposte sarà adeguato alle capacità cognitive degli alunni.

Le **prove d'uscita**, da somministrare a conclusione del modulo, saranno distinte per i due livelli-ponte.

FINALITA'

Migliorare le pratiche didattiche e valutative in funzione della continuità curricolare.

OBIETTIVI

- Approfondimento degli approcci metodologici e concettuali relativi all'argomento in oggetto (le frazioni).
- Elaborazione di un percorso d'insegnamento/apprendimento dell'argomento in oggetto che, pur se attuato con diversi livelli d'approfondimento in relazione alla diversa età scolare degli allievi, consenta di rintracciare nodi concettuali comuni.
- Ridurre al minimo le concezioni errate che, di norma, prendono piede nella mente degli alunni.

UNITA' DIDATTICHE:

- ◆ **UNITA' A: L' IDEA DI RAPPORTO**
- ◆ **UNITA' B: FRAZIONE COME OPERATORE**
- ◆ **UNITA' C: CLASSI DI EQUIVALENZA ORDINATE E OPERAZIONI CON LE FRAZIONI**

UNITA' A: L' IDEA DI RAPPORTO

FINALITA'

Gli alunni cui è indirizzato il lavoro hanno già avuto modo, nel loro precedente percorso d'apprendimento, di imbattersi in problemi e situazioni da affrontare e risolvere attraverso lo strumento "frazione".

Al fine di innestare il nuovo su quanto già esistente, per trarne vantaggio in termini di fissazione delle nuove conoscenze mediante saldatura con campi concettuali già esplorati, viene effettuato un primo lavoro di ricognizione e d'omogeneizzazione dei livelli di partenza.

Gli apprendimenti già realizzati dagli alunni vengono discussi, analizzati, integrati e ri-orientati, mettendo al centro dell'attenzione le idee di rapporto e di operatore.

OBIETTIVI

- Riconoscimento ed utilizzo dell'operazione unaria (stato-operatore-stato).
- Costruzione ed analisi di rapporti in 1, 2, 3 spazi di misura.
- Riconoscimento ed utilizzo di operatori scalari e proporzionali (presenza e assenza di dimensione).
- Utilizzo di procedimenti costruttivi-intuitivi per determinare rapporti mediante il calcolo mentale.

CONTENUTI

1. problemi di proporzionalità diretta tra due spazi di misure (isomorfismo di misure); operatori scalari e proporzionali nelle relazioni a quattro termini (diretti ed inversi)
2. calcolo mentale: rapporti equivalenti, "maggiori", "minori"
3. problemi di proporzionalità diretta ed inversa tra tre spazi di misure (prodotto di misure e proporzionalità semplice), riduzione a casi di proporzionalità semplice
4. calcolo mentale: la proporzionalità inversa nei prodotti della tavola pitagorica (schieramenti "rettangolari", "quadrati", "primi"), nel calcolo delle dimensioni a partire dai volumi e nel rapporto tempo-spazio (tabelle di corrispondenza da completare)

ESEMPI DI ATTIVITA'

Le situazioni problematiche proposte, e quelle che il singolo docente proporrà ad integrazione di queste, debbono costituire il punto di partenza per:

- riesaminare il lavoro svolto ed integrare gli aspetti che non sono stati sviluppati
- indurre negli alunni una riflessione metacognitiva in funzione di una migliore e più sicura padronanza concettuale
- migliorare il controllo sui processi di concettualizzazione a partire dai significati intuitivi.

IDEA DI RAPPORTO NELLA MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE

	Operatore <u>scalare</u>	Operatore <u>funzionale</u>
multiplicazione	<p>pacchetti caramelle</p> <div> <div>1 p</div> <div>5 c</div> </div> <p>4 p 4 volte ?</p> <p>↓</p>	<p>pacchetti caramelle</p> <div> <div>1 p</div> <div>5 c</div> </div> <p>4 p 5 c / 1 p ?</p> <p>→</p>
	<p>pacchetti caramelle</p> <div> <div>1 p</div> <div>?</div> </div> <p>4 p 4 parti 20 c</p> <p>↑</p> <p>Problemi di ripartizione</p>	<p>pacchetti caramelle</p> <div> <div>1 p</div> <div>5 c</div> </div> <p>?</p> <p>1 p / 5 c 20 p</p> <p>←</p> <p>Problemi di contenenza</p>

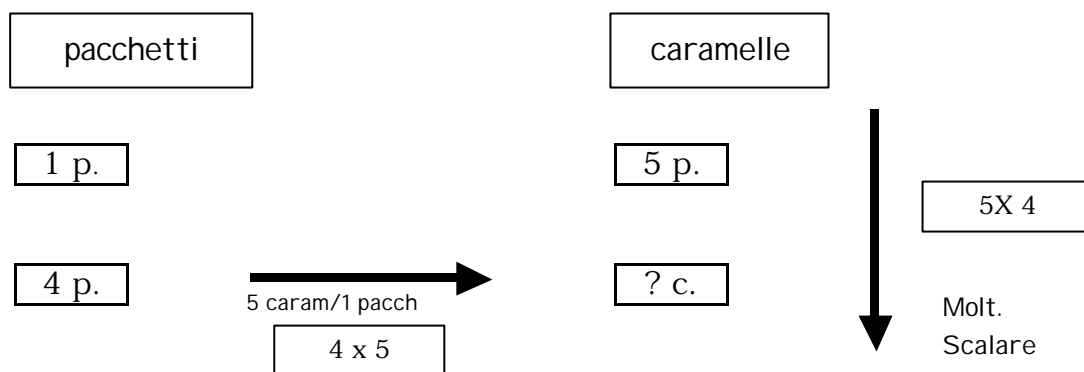
STRUTTURE MOLTIPLICATIVE

Problema di moltiplicazione

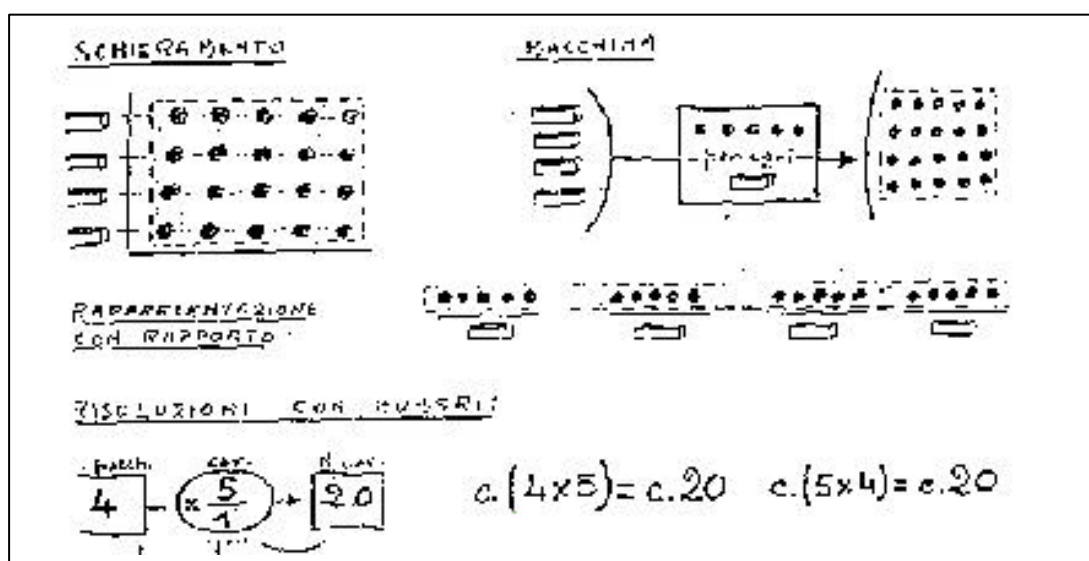
Luca compra 4 pacchetti di caramelle contenenti 5
caramelle ciascuno.

Quante caramelle compra in tutto ?

Schema :



Molt. funzionale



STRUTTURE MOLTIPLICATIVE

Divisione in problema di ripartizione

Colloco 20 fiori in 4 vasi e ne metto la stessa quantità in ciascun vaso.

Quanti fiori andranno in ciascun vaso ?

Schema :

vasi

fiori

1 v.

? f.

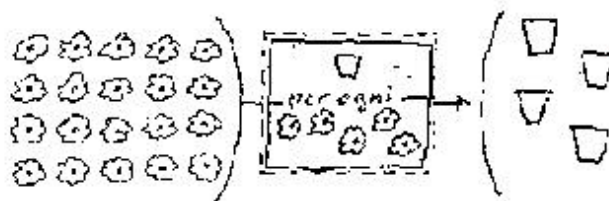
4 v.

20 f.

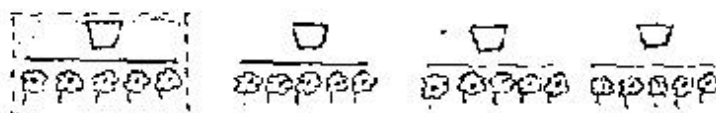
20:4

Div.
Scalare

SCHIERAMENTO



RAPPRESENTAZIONE CON RAPPORTO



RISOLUZIONI CON NUMERI



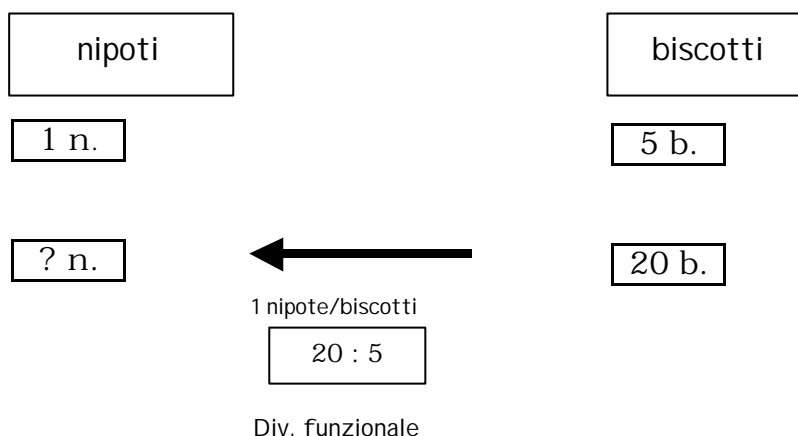
$$\frac{n. \text{ fiori}}{n. \text{ vasi}} (20 : 4) = \frac{n. \text{ fiori}}{1 \text{ vaso}} 5$$

STRUTTURE MOLTIPLICATIVE

Divisione in problema di contenenza

Nonna Lisa ha 20 biscotti e li regala tutti, dandone 5 a ciascuno dei suoi nipoti.
Quanti nipoti ha nonna Lisa ?

Schema :

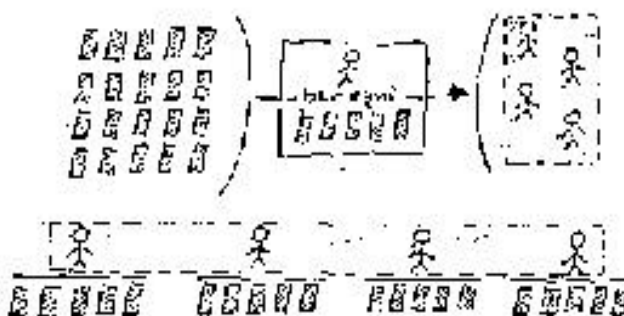


SCHEMATISMO

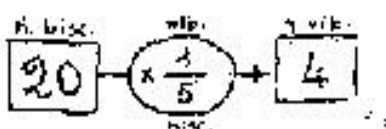


RAPPRESENTAZIONE
CON RAPPORTE

MACCHINERIE



RISOLUZIONI CON NUMERI



$$n. (20 : 5) = n. 4$$

Nella moltiplicazione e divisione le situazioni problematiche costituiscono il punto di partenza

- per riesaminare il lavoro svolto e integrare gli aspetti che non sono stati sviluppati
- per indurre negli alunni una riflessione metacognitiva in funzione di una migliore e più sicura padronanza concettuale
- per migliorare il controllo sui processi di concettualizzazione a partire dai significati intuitivi

1. ISOMORFISMO di MISURE: proporzionalità diretta tra due spazi di misura M_1, M_2 .

a.

C	M
1	12
2	24
3	36
...	...

C	M
3	?
?	60
8	?
?	48

C	M
1	12
...	...
3	?

C	M
1	12
...	...
?	36

C	M
1	?
...	...
3	36

C	M
3	36
...	...
7	?

C	M
8	96
...	...
5	?

Discutiamo:.....

OPERATORI SCALARI:

"3 VOLTE" = $\times 3$

"3 PARTI" = $: 3$

OPERATORI -FUNZIONE:

"12 ogni 1" = $\times 12$

"1 ogni 12" = $: 12$

b: CALCOLO MENTALE E SITUAZIONI... ANOMALE

C	M
10	120
5	?

C	M
10	120
?	240

C	M
5	60
15	?

C	M
5	60
?	180

C	M
?	60
15	180

C	M
?	60
50	600

C	M
5	60
?	30

c. ANCORA SITUAZIONI... ANOMALE DA DISCUTERE

- 2 cassette e mezzo: quante mele?
42 mele: quante cassette?
- 2 cassette e un quarto: quante mele?
6 mele: quante cassette?

- 2.5 cassette: che significa? Quante mele?

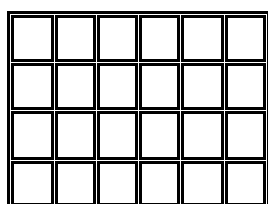
In quanti modi possiamo esprimere l'idea dal punto di vista linguistico? E dal punto di vista aritmetico?

6 mele: quante cassette? ... e 30 mele? ... e 28 mele?

2. PRODOTTO DI MISURE : proporzionalità diretta e inversa implicata dalla composizione cartesiana di due spazi di misura M_1 , M_2 di un terzo spazio M_3 ; ne risulta una doppia proporzionalità, riconducibile per scomposizione a quella semplice.

Esempi : prodotto cartesiano (coppie ordinate), aree e volumi, velocità, peso specifico

AREA di un RETTANGOLO



dimensioni
b = 6 trattini _
h = 4 trattini _
A = 24 quadretti ÷

CASI	b	h	A
	6	4	24
	6	2	?
	6	8	?

ecc.

b	h	A
6	4	24
3	4	?
9	4	?

ecc.

b	h	A
6	4	24
3	?	24
?	2	24

ecc.

OPERATORI:

Righe	Quadretti Ogni riga	Quadretti
4	$\frac{6}{1}$	24

Oppure:

Colonne	Quadretti Ogni colonna	Quadretti
6	$\frac{4}{1}$	24

Analogamente si può procedere con

- Area di base x altezza = volume prisma
- Tempo x velocità = spazio
- Volume per densità = massa

Numeri fissi → diametro $\frac{\text{circonferenza}}{\text{diametro}}$ circonferenza
 stato operatore funzione stato

(nel caso del cerchio è utile sollecitare il calcolo mentale più che scritto utilizzando per π il valore approssimativo di "tre volte e un po'")

3. PROPORZIONALITA' MULTIPLA: proporzionalità diretta ed inversa in cui M_3 è proporzionale a due distinti spazi di misura M_1 , M_2 tra loro indipendenti)

Esempi: consumo, produzione, spesa ... in relazione a tempo e numero di soggetti...
 Casi ("quattro persone in due giorni stirano ottanta camicie...")

P	G	C
4	2	80
8	1	?
2	4	?
5	3	?

P	G	C
4	2	80
8	?	80
2	?	80
5	?	150

P	G	C
4	2	80
?	1	80
?	4	80
?	3	150

Per ricondurre questa tipologia di situazioni a quella, più semplice, dell'isomorfismo di misure

P	G	C
(4)	2	80
(4)	1	?

cioè

G	C
1	?
2	80

Si evidenzia la relazione tra G e C

P	C
1	?
4	80

cioè

P	G	C
4	(2)	80
1	(2)	?

Si evidenzia la relazione tra P e C

UNITA' B: FRAZIONE COME OPERATORE

FINALITA'

Partendo da operazioni concrete su grandezze discrete (insiemi di oggetti), si delinea un percorso in cui si alternano attività guidate e nodi problematici da risolvere; si mantiene un isomorfismo operatorio nel passaggio dal discreto al continuo, utilizzando come rinforzo il riferimento ai numeri naturali e al calcolo mentale.

OBIETTIVI

Al termine dello svolgimento dell'unità didattica l'alunno dovrà saper utilizzare e padroneggiare i concetti di:

- frazione come operatore scalare e proporzionale, risultante dalla composizione di due operatori
- frazione come operatore su grandezze discrete, continue, numeri
- presenza/assenza della relazione di inclusione e uso 'transitivo' o 'riflessivo' dell'operatore frazionario

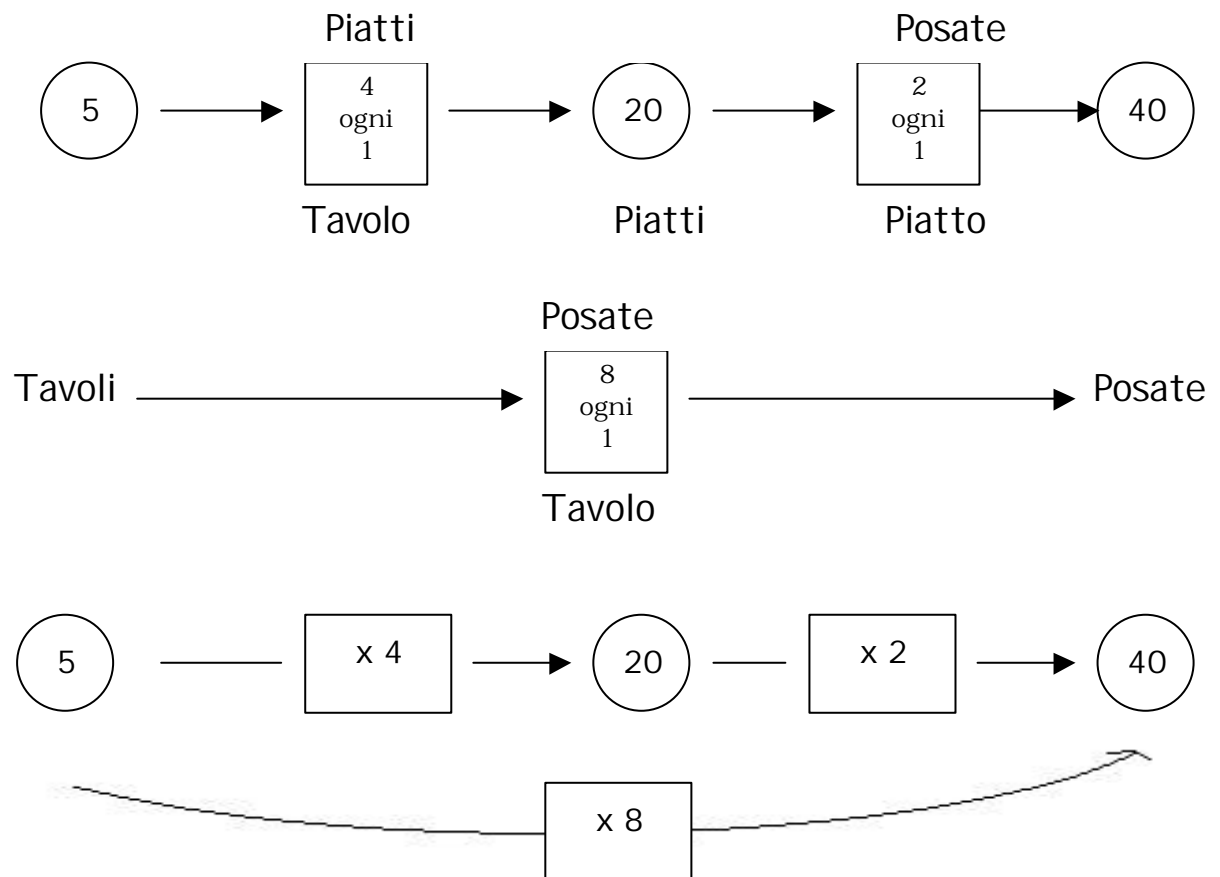
CONTENUTI

1. Problemi di proporzionalità multipla in cui si può costruire l'operatore proporzionale frazionario.
2. Problemi di proporzionalità semplice in cui si può costruire l'operatore scalare frazionario.
3. Calcolo mentale: operatori 'maggiori', 'minori', 'equivalenti'
4. Calcolo mentale: frazioni inverse, elemento neutro, espressioni.

ESEMPI DI ATTIVITA'

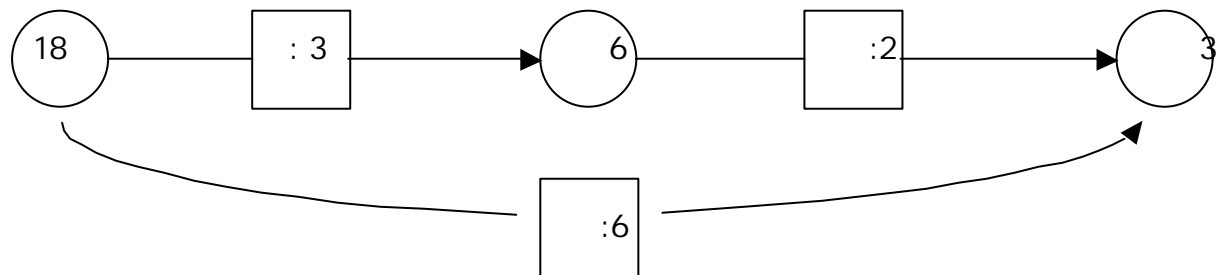
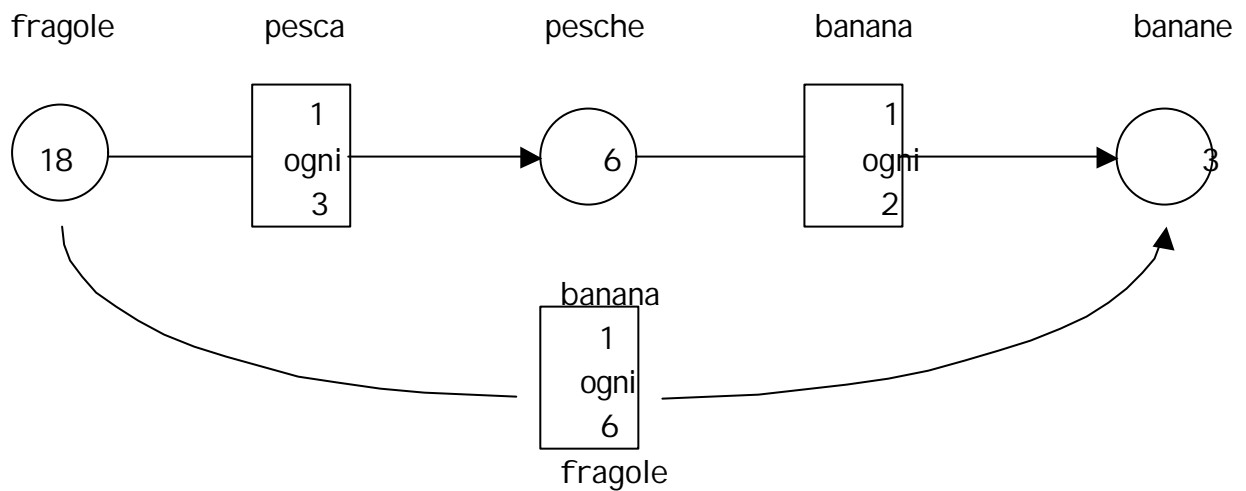
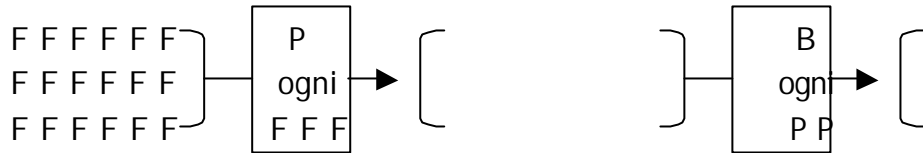
a. COSTRUZIONE DELL'OPERATORE PROPORZIONALE

TAVOLI , PIATTI E POSATE: In un ristorante ci sono 5 tavoli, su ogni tavolo ci sono 4 piatti, per ogni piatto ci sono 2 posate. Quanti piatti? Quante posate in tutto?



$$(5 \times 4) \times 2 = 5 \times (4 \times 2) = 5 \times 8 = 40$$

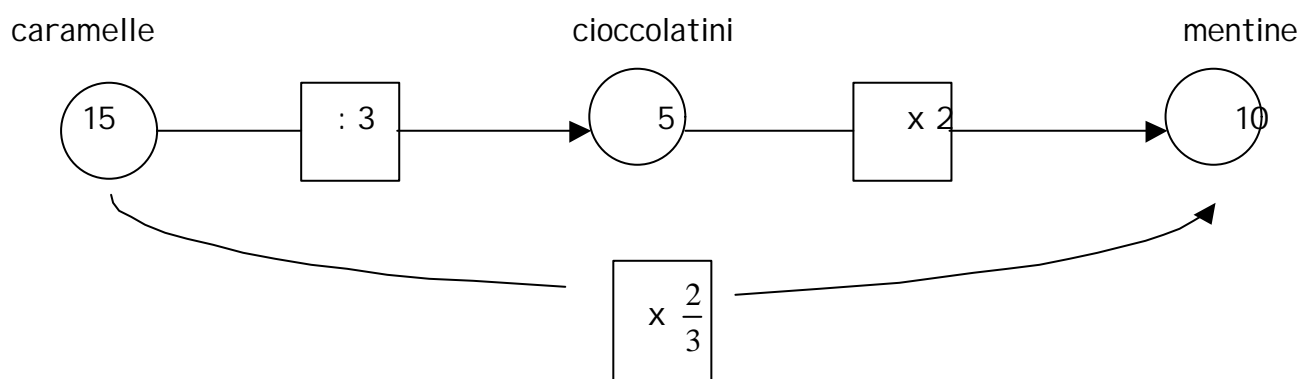
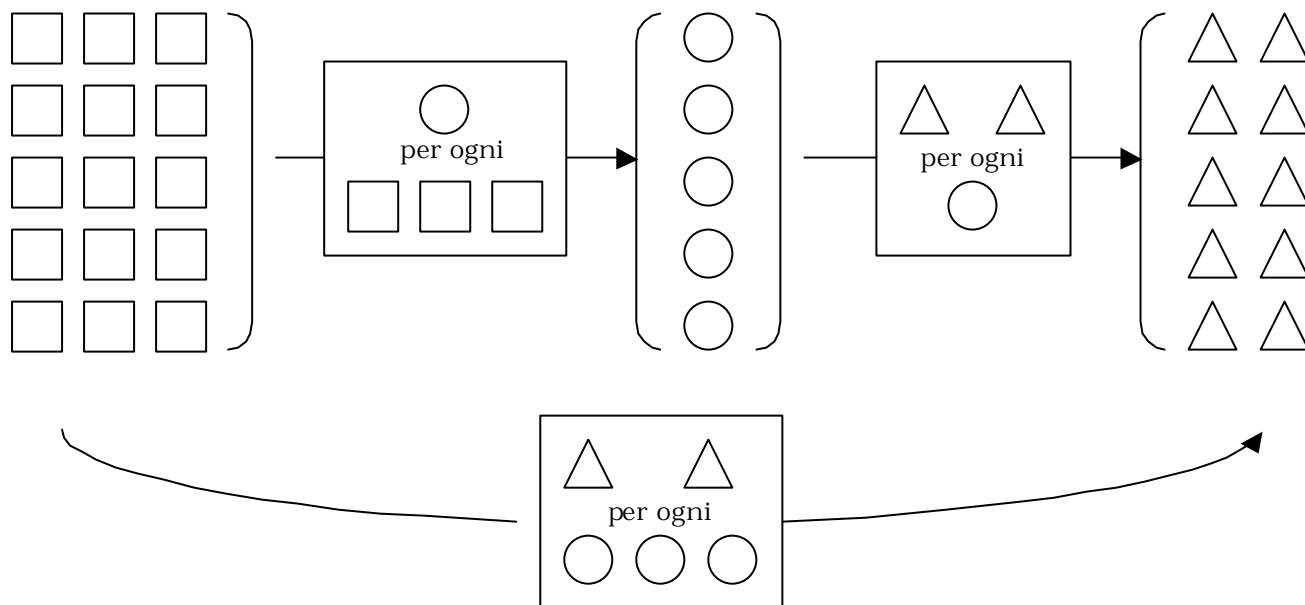
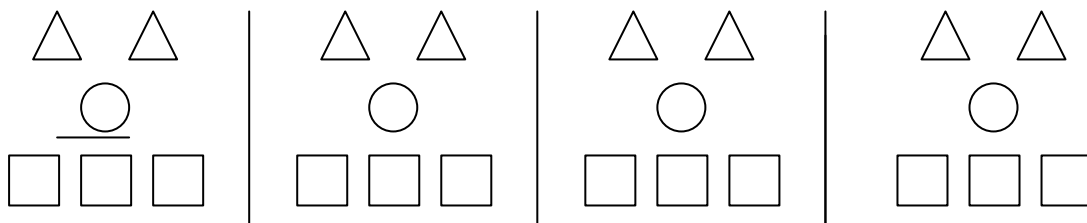
Problema -tipo : « In frutteria » Ho 18 fragole (F). Posso scambiare 1 pesca (P) ogni 3 fragole o 1 banana (B) ogni 2 pesche. Quante pesche posso ottenere con lo scambio? Quante banane? Per ogni banana quante fragole?



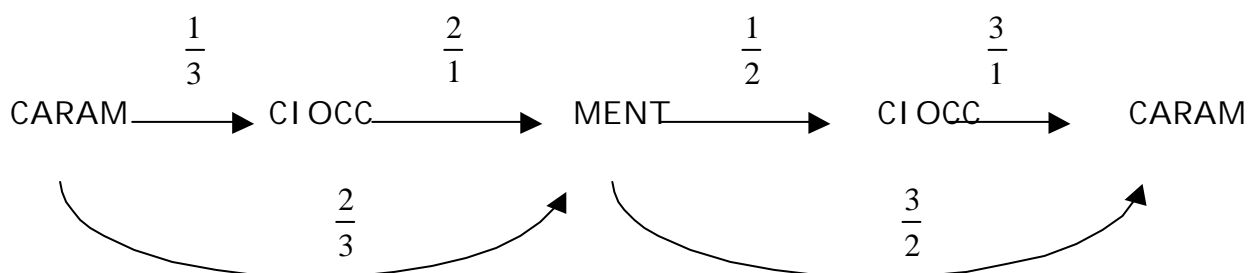
$$(18 : 3) : 2 = 18 : 6 = 3$$

Problema -tipo : Ho 15 caramelle e le cambio con cioccolatini, ottenendo 1 cioccolatino per ogni 3 caramelle. Quanti cioccolatini ottengo?
 Cambio poi i cioccolatini con mentine, ottenendo 2 mentine per ogni 1 cioccolatino. Quante mentine otterrò?
 Con quale regola posso scambiare direttamente mentine con caramelle?

LEGENDA: ○ = cioccolatini □ = caramelle △ = mentine

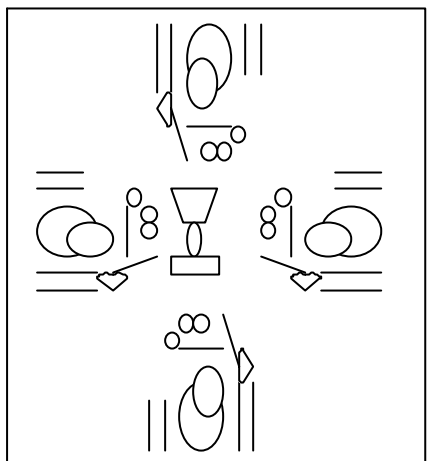


nei due sensi:



COMPOSIZIONE DI OPERATORI

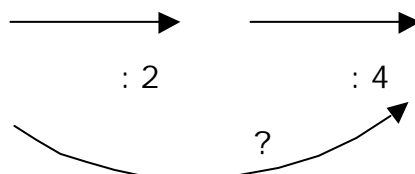
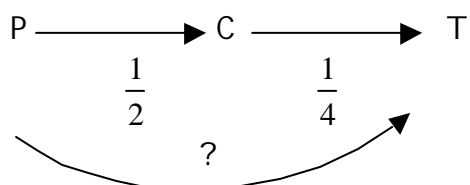
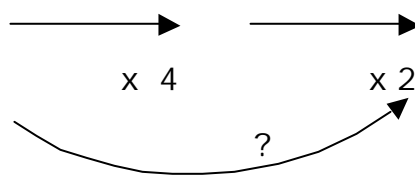
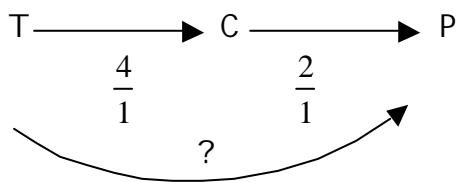
Esercizio-tipo: “Al Ristorante” “Su ogni tavolo apparecchiato ci sono 4 coperti ed 1 lampada . Ogni coperto comprende 2 piatti, 5 stoviglie, 3 bicchieri ed 1 rosa rossa. I tavoli in sala sono 12”



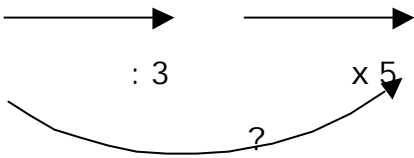
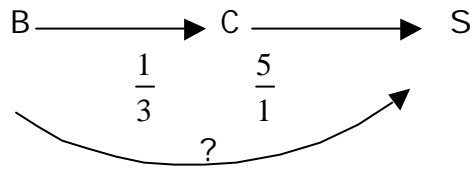
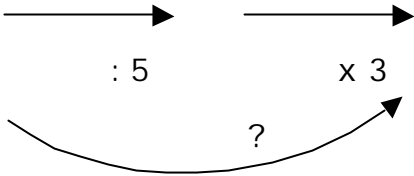
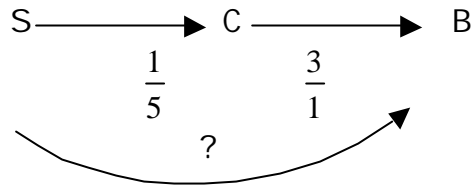
T = tavoli
P = piatti
S = stoviglie
B = bicchieri
C = coperti
R = rose
L = lampade

T	C	P
1	4	8
?	8	16
3	?	24
10	?	?
?	32	?
?	?	40
?	24	?

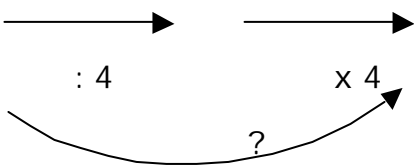
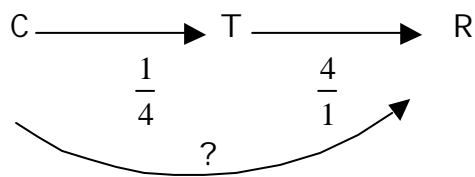
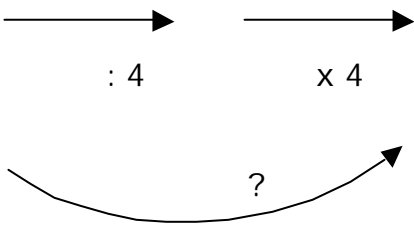
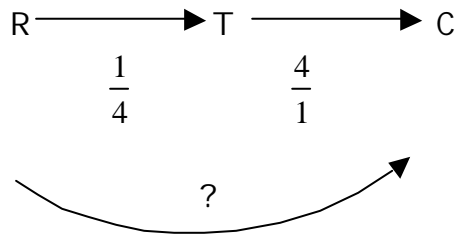
Con i numeri naturali



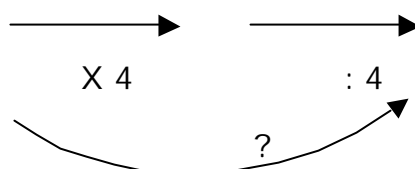
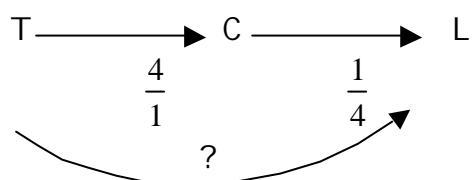
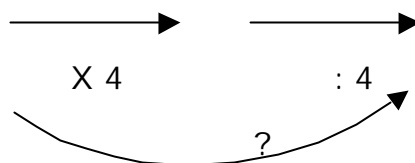
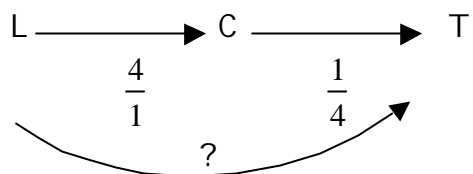
S	C	B
5	1	3
20	?	12
?	3	?
Ecc.	ecc.	ecc.



R	T	C
4	1	4
Ecc.	ecc.	ecc.

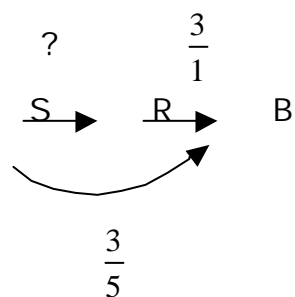
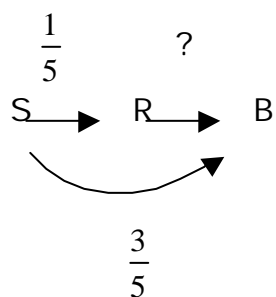
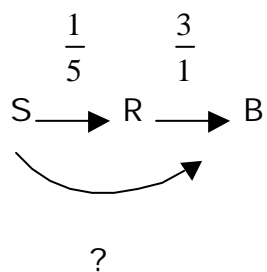


L	C	T
1	4	1
Ecc.	ecc.	ecc.

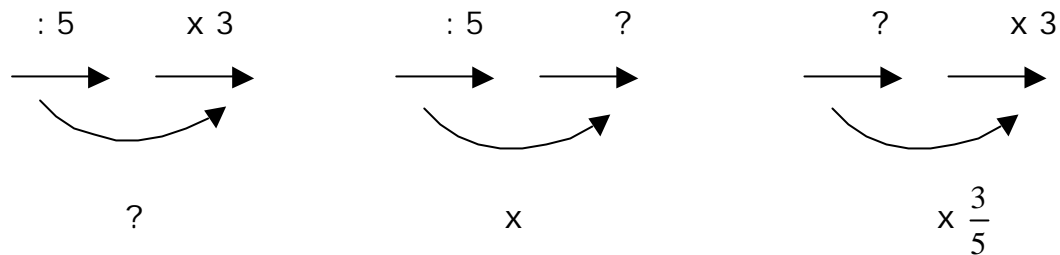


Riprendi l'esercizio-tipo "Al Ristorante". Continua tu:

S	R	B
5	1	3
20	?	?
?	4	?
?	?	18



Svolgi lo stesso esercizio solo con i numeri (Naturali e Razionali)



COSTRUZIONE DELL'OPERATORE SCALARE

Esercizio-tipo: In 4 cassette (C) ci sono 48 mele (M). Quante mele avremo in 7 cassette?

C	M
4	48
7	?

C	M
1	?
4	48
7	?

C	M
1	?
4	48

C	M
1	x
7	?

C	M
1	
4	48
7	

$\frac{7}{4}$ (curved arrow from 4 to 7 in C column)

4 parti (curved arrow from 1 to 4 in C column)

7 volte (curved arrow from 1 to 7 in C column)

l'operatore scalare frazionario è $x \frac{7}{4}$ cioè : 4 e poi $x 7$ o viceversa
oppure "fare 7 volte 1 delle 4 parti"

Esercizio-tipo: Occorrono 7 cassette per 84 mele. Quante mele riempiono 4 cassette ?

C	M
4	?
7	84

C	M
1	?
4	?
7	84

C	M
1	?
7	84

C	M
1	x
4	?

C	M
1	
4	
7	84

$\frac{4}{7}$ (curved arrow from 7 to 4 in C column)

7 parti (curved arrow from 1 to 7 in C column)

4 volte (curved arrow from 1 to 4 in C column)

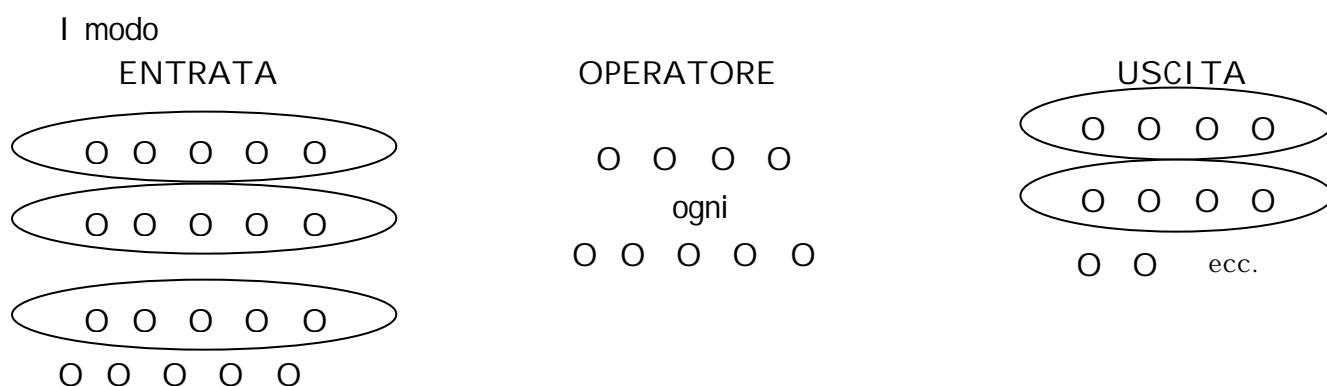
DAL DISCRETO AL CONTINUO

Problema tipo: “ Carlo ha una confezione di 20 merendine. Le merendine di Silvia sono i $\frac{4}{5}$ delle merendine di Carlo. Quante sono le merendine di Silvia?”

N.B. La formulazione linguistica del problema deve essere costruita in modo da eliminare ogni possibile errore nella comprensione del testo. Va fatto notare che le merendine di Carlo sono distinte da quelle di Silvia e non una parte di esse.

L'operatore $\frac{4}{5}$ non modifica il numero delle merendine di Carlo, ma serve a determinare il numero di quelle di Silvia.

a) OPERAZIONE CON GLI OGGETTI

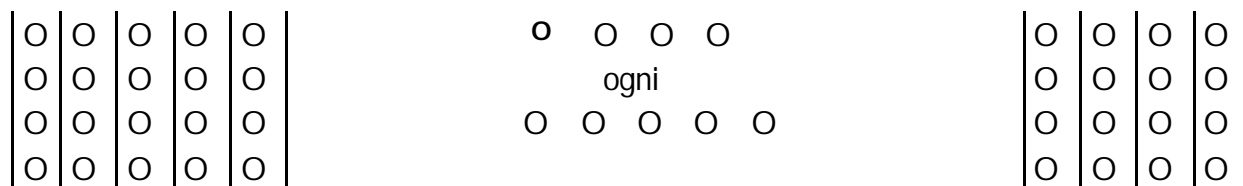


andando avanti e indietro
tra entrata e uscita

Verbalizziamo: “Ogni 5 merendine che vedo all'entrata, metto 4 merendine all'uscita”

L'operatore funziona in modo transitivo, cioè si applica a quantità di oggetti (entrata) per determinare una seconda quantità (uscita) distinta dalla prima.

II modo



Si lavora prima solo all'entrata
e poi solo all'uscita

Verbalizziamo: "Formo all'entrata 5 gruppi uguali di merendine e metto all'uscita 4 gruppi di merendine che vedo all'entrata"

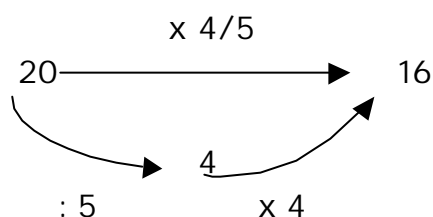
Riflessione (da parte degli alunni): Ottengo sempre 16 merendine all'uscita. I 2 modi di operare portano sempre alla stessa conclusione: **16 merendine sono 4/5 di 20 merendine.**

b) OPERAZIONE CON I NUMERI

Sostituisco gli oggetti ai numeri

MERENDINE DI CARLO

MERENDINE DI SILVIA



$$\text{Cioè: } 20 \times \frac{4}{5} = (20 : 5) \times 4 = 16$$

Verbalizziamo: "Ciò che abbiamo fatto con gli oggetti somiglia in tutto all'operazione con i numeri. Formare all'entrata gruppi di 5 merendine ciascuno o formare 5 gruppi uguali di merendine significa sempre **diviso 5**; mettere all'uscita 4 merendine per ogni gruppo di 5 all'entrata o mettere 4 gruppi uguali a quelli dell'entrata significa sempre **per 4**"

Riflessione: L'operatore $\times \frac{4}{5}$ è un operatore doppio e si scompone in $:5$ e poi $\times 4$. Diciamo anche che 16 è 4/5 di 20.

L'operatore funziona in modo transitivo, cioè si applica a grandezze continue (entrata) per determinare una seconda grandezza (uscita) distinta dalla prima.

Nel problema iniziale sostituisci l'operatore $\frac{4}{5}$ con $\frac{5}{4}$ e ripeti il procedimento con gli oggetti e con i numeri. Ciò consentirà di utilizzare come operatori indifferentemente **frazioni proprie e improprie**; il lavoro con i numeri serve da rinforzo e sviluppo. Con un'osservazione successiva si confrontano entrate ed

uscite e si coglie che alcuni operatori producono un'uscita maggiore dell'entrata o il contrario.

Nel problema iniziale sostituisci l'operatore $4/5$ con $5/5$ e ripeti il procedimento con gli oggetti e con i numeri.

Osservazione: alcuni operatori producono un'uscita uguale all'entrata.

Nel problema iniziale sostituisci l'operatore $4/5$ con $4/4$ e ripeti il procedimento con gli oggetti e con i numeri.

Osservazione: alcuni operatori producono un'uscita uguale all'entrata.

Con un'entrata opportunamente scelta si possono individuare operatori più potenti di altri oppure ad essi equivalenti.

Con i numeri si può procedere ad individuare operatori con termini più manipolabili, dominabili intuitivamente.

Esercizio-tipo: Solo con i numeri e mettendo all'entrata 12 oggetti usa tutti gli operatori indicati sotto:

$2/3$ e $3/2$

$3/4$ e $4/3$

$8/6$ e $4/6$

$3/3$ e $6/3$

$5/6$ e $4/4$

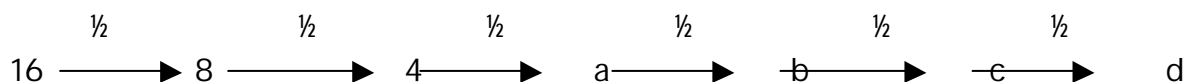
Osservazioni:

- a) Ci sono risultati uguali? Quali? Perché sono uguali?
- b) Quando capita che in uscita il numero è maggiore? Perché succede?
- c) Ci sono operazioni strane o curiose? Quali? Perché?

c) ANCORA CON I NUMERI

Problema da proporre (lo devono risolvere gli alunni e bisogna discutere le soluzioni)

partendo da 16 merendine fai la metà, ancora la metà per 6 volte



Si chiede di rispondere alle domande.

- 1) fare la metà e poi ancora la metà ("la metà della metà") sono due operazioni successive. Posso ottenere lo stesso risultato facendo una sola operazione? Se possibile, con quale operatore?
- 2) Nella catena di operazioni (6 volte la metà a partire da 16) l'operatore $\frac{1}{4}$ funziona sempre per sostituire $\frac{1}{2}$ e poi $\frac{1}{2}$?
- 3) Quali operatori dovresti usare per saltare da 16 a 2, da 16 a 1, da 8 a 1, da 4 a $\frac{1}{2}$, da 2 a $\frac{1}{4}$,?
- 4) Quando arrivi ad "a" per proseguire l'operatore $\frac{1}{2}$ quante volte funziona?
- 5) Arrivato a "b" che si fa? E a "c"?

N.B. In questa sede il problema è usato per focalizzare il passaggio dal discreto al continuo con isomorfismo operatorio. Nell'unità C sarà riproposto per distinguere la frazione-operatore dalla frazione-misura.

Esercizio-tipo :

Partendo da 64 merendine fai a mente 5 volte $\frac{1}{4}$.

Partendo da 27 merendine fai 5 volte $\frac{1}{3}$.

Partendo da 125 fai 5 volte $\frac{1}{5}$.

Attenzione. Partendo da 16 fai 5 volte $\frac{2}{4}$. Quest'ultima richiesta è un problema che serve solo per verificare il livello di concettualizzazione conseguito dall'alunno.

IL CONCETTO di 'INTERO' tra discreto e continuo

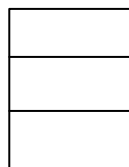
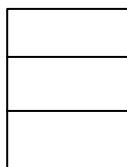
Esercizio-tipo: partendo dall'intero

"Carlo ha 3 tavolette (ma potrebbero essere 2 o 1) di cioccolato, Silvia ha $\frac{2}{3}$ delle tavolette di Carlo. Osserva i vari modi di rappresentazione del problema e disegna le tavolette di Silvia, discutendo di volta in volta con i compagni le soluzioni adottate".

a) TAVOLETTE DI CARLO

TAVOLETTE DI SILVIA

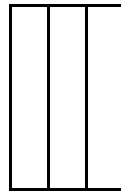
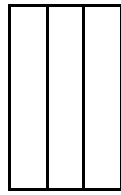
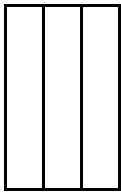
I modo



due ogni tre

?

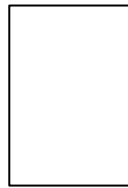
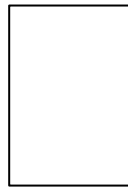
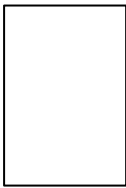
II modo



due ogni tre

?

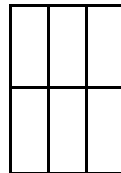
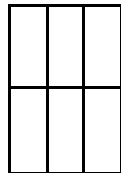
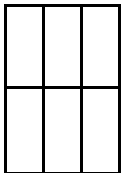
III modo



due ogni tre

?

IV modo



due ogni tre

?

b) Come sopra (4 modi), ma con 2 tavolette

c) Come sopra (4 modi), ma con 1 tavoletta

d) Verbalizzazione: a) "2 tavolette sono i $\frac{2}{3}$ di 3 tavolette"

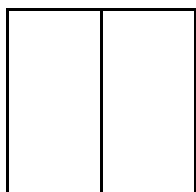
b) "1 tavoletta ed $\frac{1}{3}$ sono i $\frac{2}{3}$ di 2 tavolette" ecc.

L'INTERO come GRANDEZZA CONTINUA... 'discretizzabile'

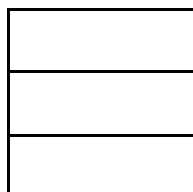
Prova a suddividere ciascuna figura in 2, 3, 4, ... parti 'uguali' (congruenti o equiestese) e discuti le procedure adottate con i compagni.

(N.B. Se ne può ricavare un cartellone ed una tavola per uso personale).

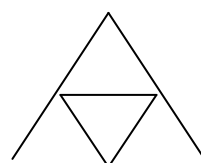
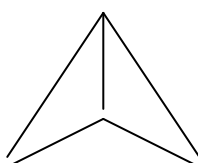
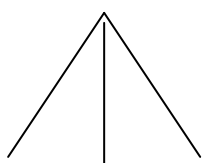
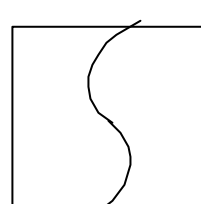
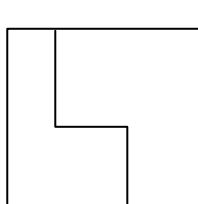
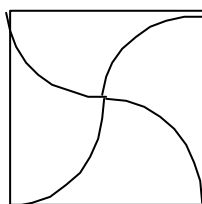
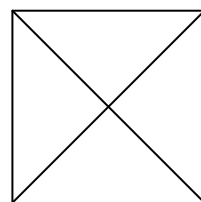
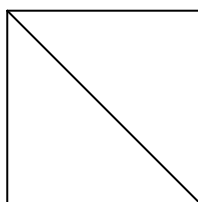
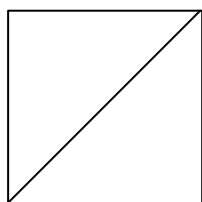
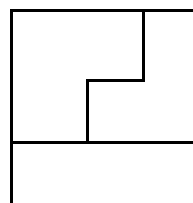
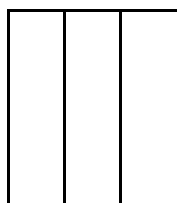
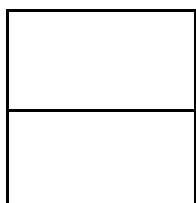
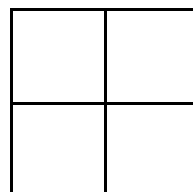
2 parti



3 parti



4 parti



RELAZIONE DI INCLUSIONE

In tutti i problemi fino ad ora utilizzati si è evitato **volutamente** di partire da situazioni che implicassero la relazione di inclusione e l'idea di "parte", al fine di diversificare questo itinerario da quello solito (libri di testo) e per realizzare una compensazione e un ri-orientamento concettuale (idea di rapporto tra insiemi o grandezze disgiunte).

A questo punto si colloca uno stimolo alla riflessione metacognitiva attraverso un problema da porre agli alunni, che riguarda la DIFFERENZA TRA DUE SITUAZIONI in cui la RELAZIONE DI INCLUSIONE è PRESENTE/ASSENTE:

- a) "Carlo ha 20 merendine e ne mangia $\frac{4}{5}$. Quante merendine ha mangiato?
- b) "Carlo ha 20 merendine; Luisa ha $\frac{4}{5}$ delle merendine che ha Carlo. Quante merendine ha Luisa?

- Risolvi i due problemi, rappresentando le due situazioni con entrata-operatore-uscita.
- Prova a sostituire l'operatore $\frac{4}{5}$ in ciascuno dei due problemi con l'operatore $\frac{5}{4}$. Che succede? Perché?

RIFLESSIONE METACOGNITIVA:

- in a) l'operatore funziona in modo "riflessivo" (all'uscita è rappresentata una quantità che "fa parte" dell'entrata); in b) l'operatore funziona in modo "transitivo" (le quantità all'entrata e all'uscita sono distinte)
- con i problemi di tipo "a" non ha senso utilizzare operatori costituiti da frazioni maggiori dell'unità

GENERALIZZAZIONE: invitiamo gli alunni a formulare problemi di tipo a) e di tipo b)

CON I NUMERI: vale anche qui la distinzione tra a) e b)? Perché?

SVILUPPO: risolvere problemi in cui l'incognita si trova

- all'uscita (come a) e b))
- all'entrata (operatore inverso)
- all'operatore (come si fa?... arrivare intuitivamente a "semplificare" il rapporto entrata/uscita)

UNITA' C: CLASSI di EQUIVALENZA ORDINATE **e OPERAZIONI con le FRAZIONI**

FINALITA'

Gli alunni sono condotti a sviluppare diversi 'significati' della frazione:
operatore – misura di grandezze – numero privo di dimensione.

Il modello della retta numerica viene elaborato con procedimento costruttivo (uso ricorsivo di operatori frazionari) e utilizzato per evidenziare diversi aspetti: ordinalità, misura, cardinalità.

La sintassi operativa delle espressioni numeriche viene proposta per via induttiva, a partire da situazioni problematiche.

OBIETTIVI

- Riconoscimento del significato della linea dei numeri e sua utilizzazione
- Ampliamento del significato della frazione
- Confronto tra modi diversi di rappresentare il numero razionale
- Passaggio dall'idea di operazione unaria a quella di operazione binaria

CONTENUTI

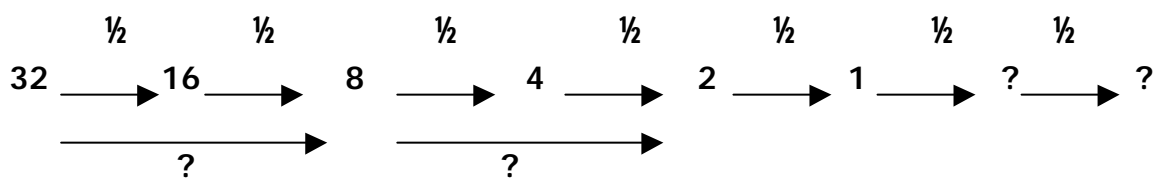
1. La frazione come entrata/uscita nell'operazione unaria
2. La frazione come divisione
3. Rapporti – operatori – frazioni equivalenti tra cardinalità e ordinalità
4. Ordinamento di frazioni
5. Operazioni con le frazioni
6. Frazioni e numeri con virgola

ESEMPI DI ATTIVITA'

1. FRAZIONE-OPERATORE E FRAZIONE-MISURA (nel passaggio dal discreto al continuo)

La mamma ha acquistato una confezione di 32 merendine. Metà le conserva e l'altra metà la divide tra i due figli Luca e Sara, dicendo che devono bastare loro per una settimana. Luca divide a metà la sua parte di merendine con l'amico Andrea e questi, tornato a casa, fa a metà con la sorella Paola, che ne dà la metà alla mamma e della metà che gli resta, metà la mangia subito...: quando si arriva ad una merendina l'operatore $\frac{1}{2}$ produce l'uscita $\frac{1}{2}$ merendina- **facciamo la metà finché è possibile. Come scriviamo con i numeri "metà merendina"? Possiamo ancora leggere "una ogni due merendine"? Sì? No? Perché?**

(Lo stesso esercizio può essere ripetuto con l'operatore $\frac{1}{4}$ ripetuto più volte su 64 oggetti - es. tavolette di cioccolato).



- fare $\times \frac{1}{2}$ e poi $\times \frac{1}{2}$ fa lo stesso lavoro di $\times \frac{1}{4}$? (verifichiamo se è così anche in altri tratti della catena)
- ATTENZIONE: $\times \frac{1}{2}$ (operatore) e $\frac{1}{2}$ (uscita) hanno lo stesso significato? quante volte abbiamo fatto "uno ogni due"?
- $\frac{1}{2}$ (entrata) e $\times \frac{1}{2}$ (operatore) hanno lo stesso significato? come facciamo a fare "uno ogni due" a partire da $\frac{1}{2}$ (entrata)? che cosa è $\frac{1}{4}$ (uscita), una grandezza o un "operatore"? quante volte hai fatto "uno ogni due"?
"fare $\frac{1}{2}$ " è diverso da " $\frac{1}{2}$ "

2. PRIMA DI FARE I CALCOLI osserva i gruppi di operazioni sulla stessa riga: quattro gruppi danno lo stesso risultato, due gruppi no. Sottolinea i due gruppi diversi. (N.B. le parentesi significano che le operazioni all'interno di esse devono essere eseguite prima).

$$\begin{array}{l} 30 \times \frac{5}{2}; \quad (30 \times 5) : 2; \quad 30 \times (5 : 2); \quad (30 : 2) \times 5; \quad 30 : (2 \times 5); \quad 30 \times \frac{2}{5} \\ 20 \times \frac{4}{5}; \quad (20 \times 4) : 5; \quad 20 : (5 \times 4); \quad (20 : 5) \times 4; \quad 20 \times (4 : 5); \quad 20 \times \frac{5}{4} \end{array}$$

$$12 \times \frac{4}{2} ; (12 \times 4) : 2 ; 12 \times (4 : 2) ; (12 : 4) \times 2 ; 12 : (4 \times 2) ; 12 \times (2 : 4)$$

ORA FAI I CALCOLI, verifica se le tue previsioni erano giuste e poi rispondi a queste domande:

- perché hai indovinato o sbagliato previsione?
- perché alcuni gruppi di operazioni danno lo stesso risultato?
- perché altri gruppi di operazioni danno un risultato diverso?

3. OPERATORI FRAZIONARI EQUIVALENTI (senza parlare di regole)

$$1 \text{ ogni } 7 = 3 \text{ ogni } ? = ? \text{ ogni } 14 = \dots = ? \text{ ogni } 700 = 10 \text{ ogni } ?;$$

$$8 \text{ ogni } 1 = \dots / \dots = \underline{4 \text{ ogni } ?} \text{ (un piccolo problema per... discutere)}$$

$$24 \text{ ogni } 15 = \frac{?}{5} = \frac{12}{?} = \text{ecc.}$$

Trova l'errore: (spiegare prima il significato della parentesi nella sequenza di calcolo)
 "1 ogni 8 di 24 " significa: $(24 : 8) \times 1$, oppure $(24 \times 1) : 8$, o $(24 \times 8) : 1$, o $24 \times 1/8$
 "6 ogni 1 di 8" significa.....

4. CONFRONTO DI OPERATORI FRAZIONARI

Stato iniziale 24

$$\frac{2}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0} \qquad \frac{2}{8}, \frac{1}{2}, \frac{8}{8}, \frac{0}{1}, \frac{1}{0} \qquad \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{1}{8}$$

Osservazioni: I ragazzi dovranno evidenziare le frazioni equivalenti, l'intero, le parti maggiori o minori dell'intero, scrivendo le loro osservazioni riguardo a queste domande:

- 1) Ci sono risultati uguali? Quali? Perché sono uguali?
- 2) Quando capita che all'uscita il numero è maggiore?
Perché succede?
- 3) Ci sono operazioni strane o curiose? Quali? Perché?
- 4) Queste operazioni ti sembrano facili o difficile da eseguire? Perché?

Le risposte individuali, ovviamente, devono essere socializzate, discusse e devono dare spazio alla verbalizzazione condivisa delle scoperte effettuate.

5. **Osserva le frazioni inserite nello schema.** Su ogni riga è possibile costruire una successione di frazioni seguendo una regola ben definita:
 - individua le frazioni di una successione e poi spiega la regola generatrice della successione stessa
 - esprimi la regola che hai individuato con un operatore.

Es.: con i numeri naturali 0, 1, 2, 3, 4, 5, ecc. la regola generatrice è che " si parte da zero e ogni numero successivo ha un'unità in più del precedente"; l'operatore che genera la successione è +1 :

0 $\xrightarrow{+1}$ 1 $\xrightarrow{+1}$ 2 $\xrightarrow{+1}$ 3 $\xrightarrow{+1}$ 4 $\xrightarrow{+1}$ 5 ecc.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	l	m	n	o
A	-	-	-	$\frac{3}{2}$	-	$\frac{5}{2}$	-	-	-	$\frac{9}{2}$	-	-	-
B	-	$\frac{1}{1}$	-	-	$\frac{4}{1}$	-	-	-	-	-	-	-	-
C	-	-	-	$\frac{3}{4}$	-	-	-	$\frac{7}{4}$	-	-	-	-	-
D	-	-	-	-	$\frac{4}{3}$	-	-	$\frac{7}{3}$	-	-	-	-	-
E	-	-	-	-	-	$\frac{5}{6}$	-	-	-	-	-	-	-
F	- (!)	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	-	-	$\frac{1}{5}$	-	-	-	-	$\frac{1}{10}$	-	-
G	$\frac{0}{10}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	$\frac{10}{10}$	-	-

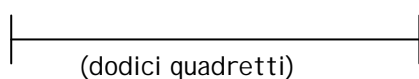
OPERATORI: A: $+\frac{1}{2}$ B: $+\frac{1}{1}$ C: $+\frac{1}{4}$

D: $+\frac{1}{6}$

E: $+\frac{1}{10}$

F: aumentare ogni volta di una unità il denominatore

6. Collochiamo su altrettante linee ognuna delle successioni di frazioni, mantenendo un unico INTERO di RIFERIMENTO:

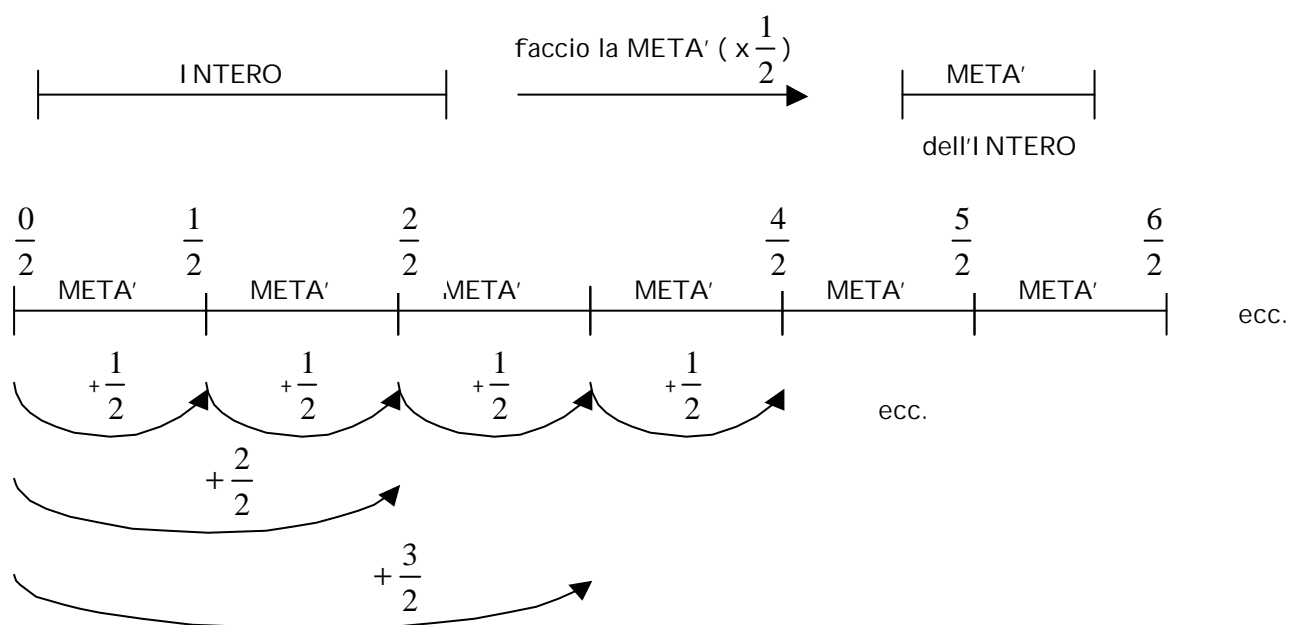


LINEA delle META':

fai la metà dell'intero di riferimento ($\times \frac{1}{2}$),

riproduci tante metà dell'intero e collocale ben allineate ($+\frac{1}{2} +\frac{1}{2} +\frac{1}{2} +\frac{1}{2} \dots$),

scrivi ai punti estremi il numero delle metà.



$$\frac{2}{2} + \frac{3}{2} =$$

$$\frac{6}{2} - \frac{5}{2} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} =$$

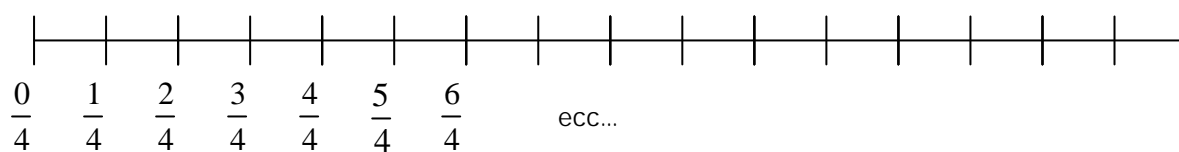
$$\frac{3}{2} \times 2(\text{volte}) =$$

$$\frac{5}{2} - \frac{3}{2} =$$

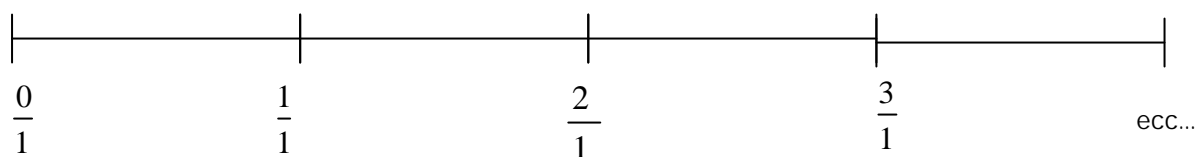
$$\frac{9}{2} : 3(\text{parti}) =$$

In modo analogo facciamo costruire agli alunni le LINEE

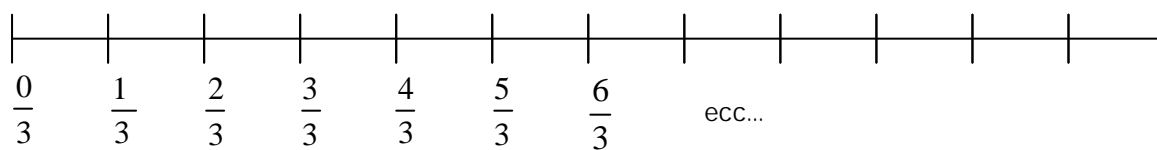
dei QUARTI: $(x \frac{1}{4} \text{ e } +\frac{1}{4})$



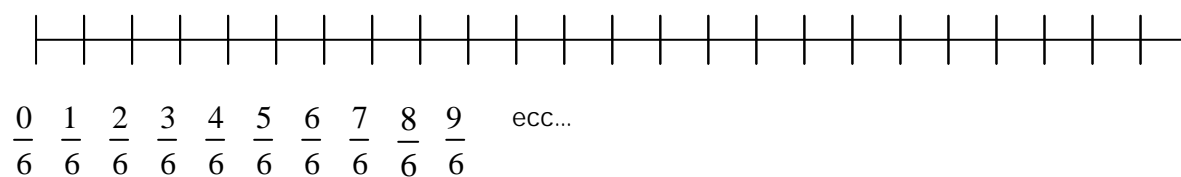
degli INTERI: $(x \frac{1}{1} \text{ e } +\frac{1}{1})$



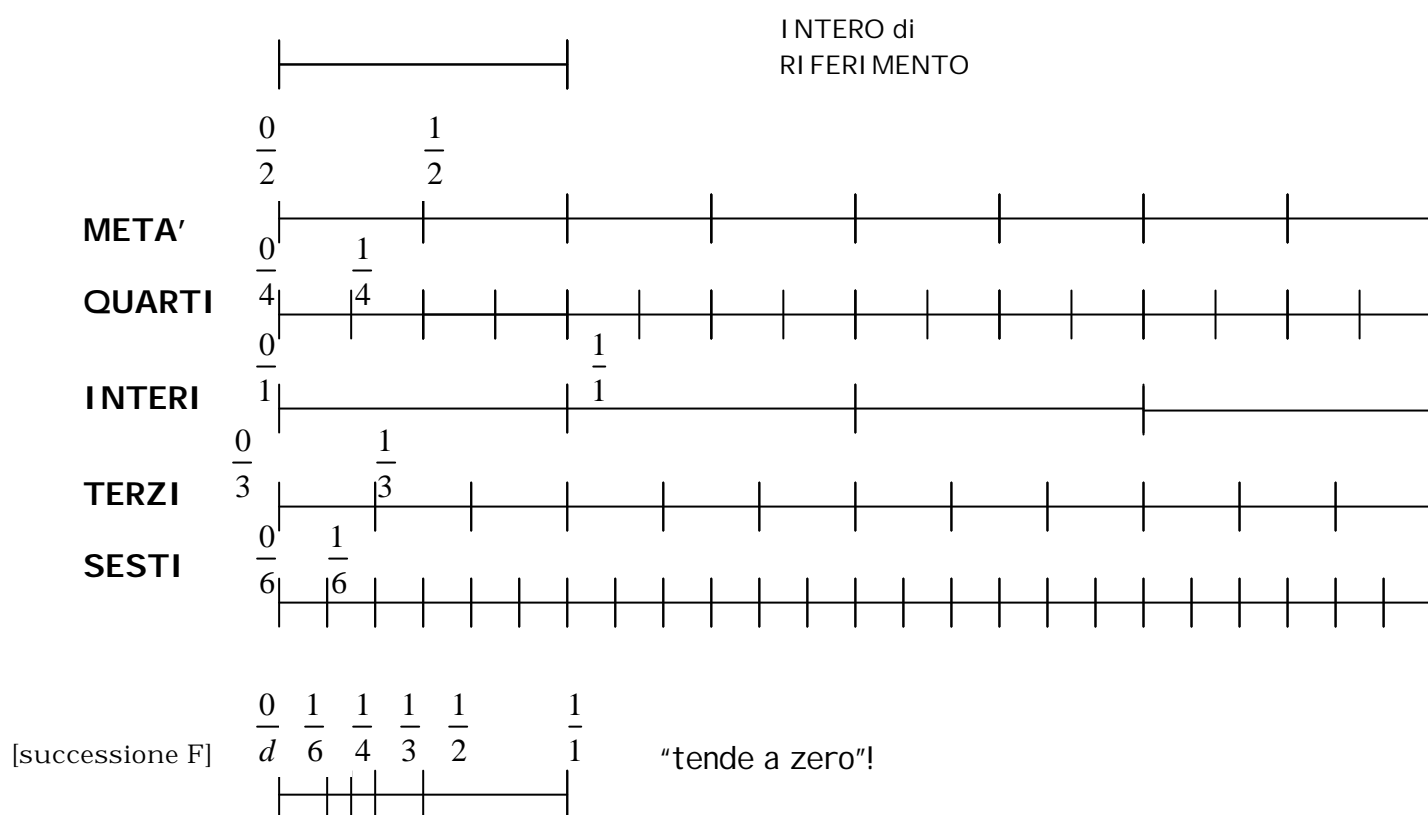
dei TERZI: $(x \frac{1}{3} \text{ e } +\frac{1}{3})$



dei SESTI: $(x \frac{1}{6} \text{ e } +\frac{1}{6})$



7. Collochiamo in parallelo le linee costruite



Osservando le linee e, se necessario, passando dall'una all'altra:

- scrivi il risultato delle operazioni sotto indicate
- spiega a parole il procedimento che hai utilizzato

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{6} =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{2} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{3} =$$

Confronta i risultati con gli addendi e fai le tue osservazioni (il denominatore del risultato...)

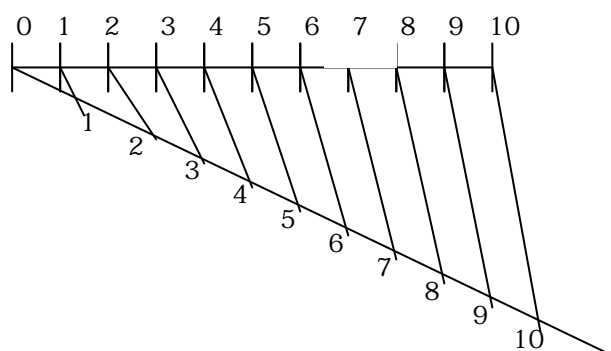
PROBLEMA: $\frac{3}{4} + \frac{5}{3} =$ (la linea dei dodicesimi non c'è, ma può essere intuita)

$$\frac{7}{2} - \frac{5}{4} =$$

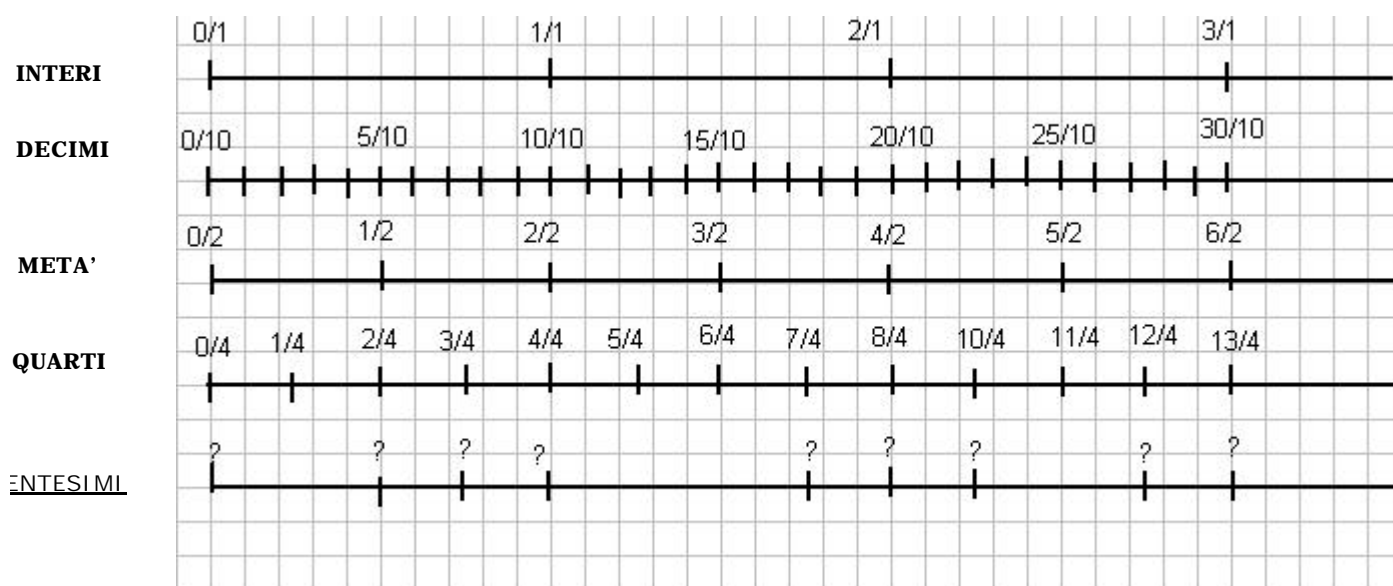
$$\frac{7}{3} - \frac{5}{6} =$$

$$\frac{17}{6} - \frac{5}{4} =$$

8. Senza più riferirsi ai dodici quadretti dell'intero e con procedimento da disegno geometrico, **individuiamo i decimi dell'intero e costruiamo la linea dei DECIMI**



ATTENZIONE: per comodità di disegno è stata variata la misura dell'intero

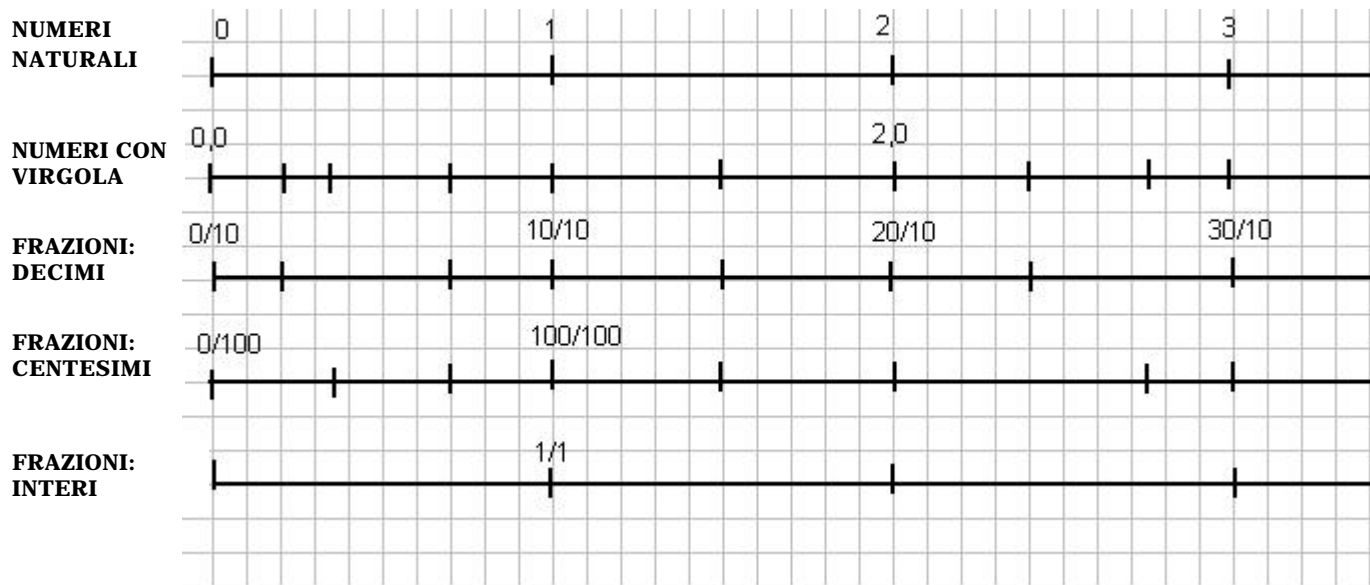


- scrivi le frazioni corrispondenti ai punti indicati sulla linea dei CENTESIMI
- individua, sempre sulla linea dei CENTESIMI, altri punti oltre a quelli indicati e scrivi le frazioni corrispondenti
- completa inserendo le frazioni mancanti (senza più guardare le linee)

$$\frac{1}{2} = \frac{\quad}{100} = \frac{\quad}{4} = \frac{\quad}{10}$$

$$\frac{10}{4} = \frac{\quad}{10} = \frac{\quad}{2} = \frac{\quad}{100} \quad \text{ecc.}$$

9. Individua la **corrispondenza dei numeri con la virgola con le frazioni decimali**: scrivi numeri o frazioni ai punti indicati



Discuti con i compagni il significato dei numeri/frazioni di seguito indicati:

$$\frac{35}{10} = \frac{?}{10} + \frac{5}{?} = \frac{?}{1} + \frac{?}{10} = ? + \frac{5}{?} = 35 : 10 = \dots, \dots$$

$$\frac{215}{100} = \frac{?}{10} + \frac{?}{100} = \frac{?}{1} + \frac{?}{10} + \frac{?}{100} = 215 : 100 = \dots, \dots$$

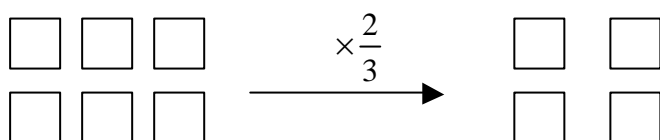
$$\frac{500}{100} = \text{ecc.}$$

10. Dall'operazione UNARIA all'operazione BINARIA

- Carlo ha vinto 6 merendine e ne ha perse $\frac{2}{3}$. Quante merendine ha perso?
- Sei amichetti hanno $\frac{2}{3}$ di una tavoletta di cioccolato ciascuno. Quante tavolette intere di cioccolato possono formare se mettono insieme tutti i pezzi?

Discuti con i compagni su come si possono rappresentare le due situazioni

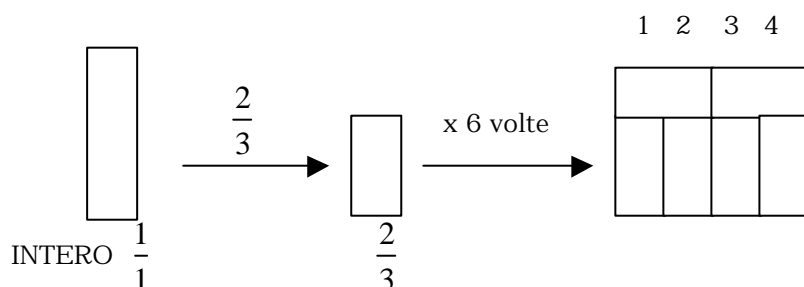
RAPPRESENTAZIONE del PROBLEMA "A"



CON I NUMERI

$$6 \times \frac{2}{3} =$$

RAPPRESENTAZIONE del PROBLEMA "B"



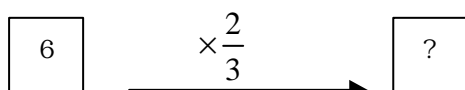
$$\frac{2}{3} \times 6 =$$

Confronta i risultati dei due problemi e spiega perché sono...come sono.

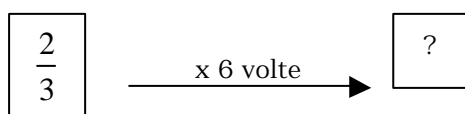
OPERAZIONI UNARIE

(diversa nel caso a e b)

ENTRATA OPERATORE USCITA



b

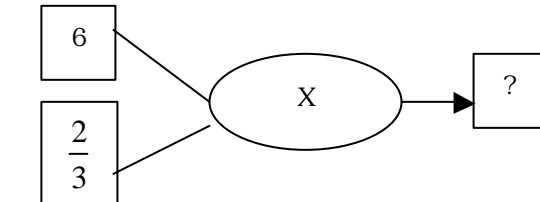


OPERAZIONE BINARIA

(uguale nel caso a e b)

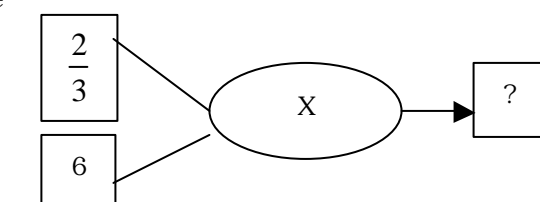
ENTRATA OPERATORE USCITA

a,b



oppure

a,b



VERBALIZZAZIONE:

- fare $6 \times \frac{2}{3}$ oppure $\frac{2}{3} \times 6$ è la stessa cosa, con i numeri
(come $3 \times 2 = 2 \times 3$)”
- “anche con le operazioni otteniamo lo stesso risultato”
 $10 \times \frac{4}{5} = 10 : 5 \times 4 = 8$ $\frac{4}{5} \times 10 = \frac{40}{5} = \frac{4 \times 10}{5} = 4 \times 10 : 5 = 8$
- “anche con i numeri con la virgola è la stessa cosa”
 $\frac{4}{5} \times 10 = (4 : 5) \times 10 = 0,8 \times 10 = 8,0 = 8$
- “possiamo divertirci anche in un altro modo”
 $\frac{4}{5} \times 10 = (4 \times 10) : 5 = \frac{4 \times 10}{5} = \frac{40}{5} = \frac{8}{1} = 8 = 8,0$

11. OPERAZIONI con le FRAZIONI

In questa unità abbiamo già proposto operazioni con le frazioni, sempre a partire da rappresentazioni dotate di un qualche significato intuitivo concreto:

- addizioni e sottrazioni in riferimento alle linee delle frazioni
- semplici moltiplicazioni e divisioni in senso “scalare” (volte-parti)
- individuazione intuitiva del denominatore comune di due frazioni

Il passaggio alla sintassi completa (e alle relative regole astratte) delle operazioni con le frazioni nelle espressioni e nelle equazioni può e deve essere curato e graduale.

ESEMPI

Problema 1

$$\boxed{\frac{8}{5} = \frac{4}{?}}$$

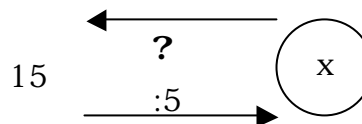
SOLUZIONI (canoniche e non) da DISCUTERE

$$\frac{4}{5:2}, \frac{4}{2,5}, \frac{4}{\frac{5}{2}}, \frac{4}{\frac{25}{10}} \dots$$

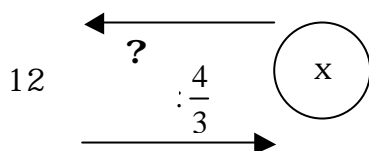
Problema 2

$$\boxed{12 : \frac{4}{3}}$$

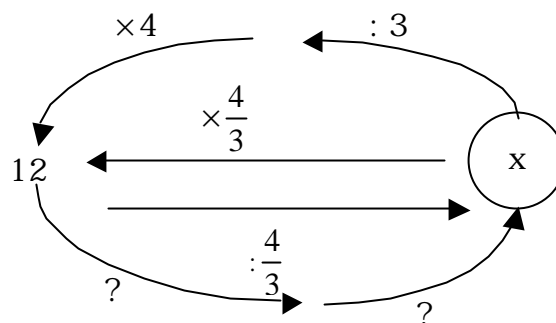
Ricordiamo che con i numeri naturali
si usa l'operazione inversa



Con le frazioni



L'operazione
inversa di
 $: \frac{4}{3}$ è $\times \frac{4}{3}$



$$x : 3 \times 4 = 12 \quad \text{perciò} \quad 12 : 4 \times 3 = x \quad \text{cioè} \quad 12 : \frac{4}{3} = 12 \times \frac{3}{4}$$

(come sempre, più scoprono gli alunni e meno "spiega" l'insegnante e...meglio è)

Problema 3

N.B.:

probabilmente $\frac{5}{6}$

sarà trattato come
operatore

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{5}{3}}{\frac{5}{6}}$$

con riferimento alle rette delle frazioni ed
al problema precedente, gli alunni
dovrebbero riuscire a risolverlo (non
necessariamente in modo individuale) e non
senza...l'aiuto/mediazione del docente)

**SIAMO ORMAI VICINI ALLA SOGLIA DI RAGIONAMENTO
DEDUTTIVO/ASTRATTO ma:**

- le elaborazioni astratte convivono fianco a fianco con quelle concrete ed intuitive (anche per noi insegnanti)
- la riflessione metacognitiva è un potente mediatore per la sistematizzazione dei quadri concettuali
- piaccia o no, l'astrazione non avviene di colpo e ovunque

12. NUMERI RAZIONALI e...PROBLEMI

- $0,4 \times 8$ per gli alunni è stessa cosa di $8 \times 0,4$
- frazione complementare
- numeri misti e numeri periodici...