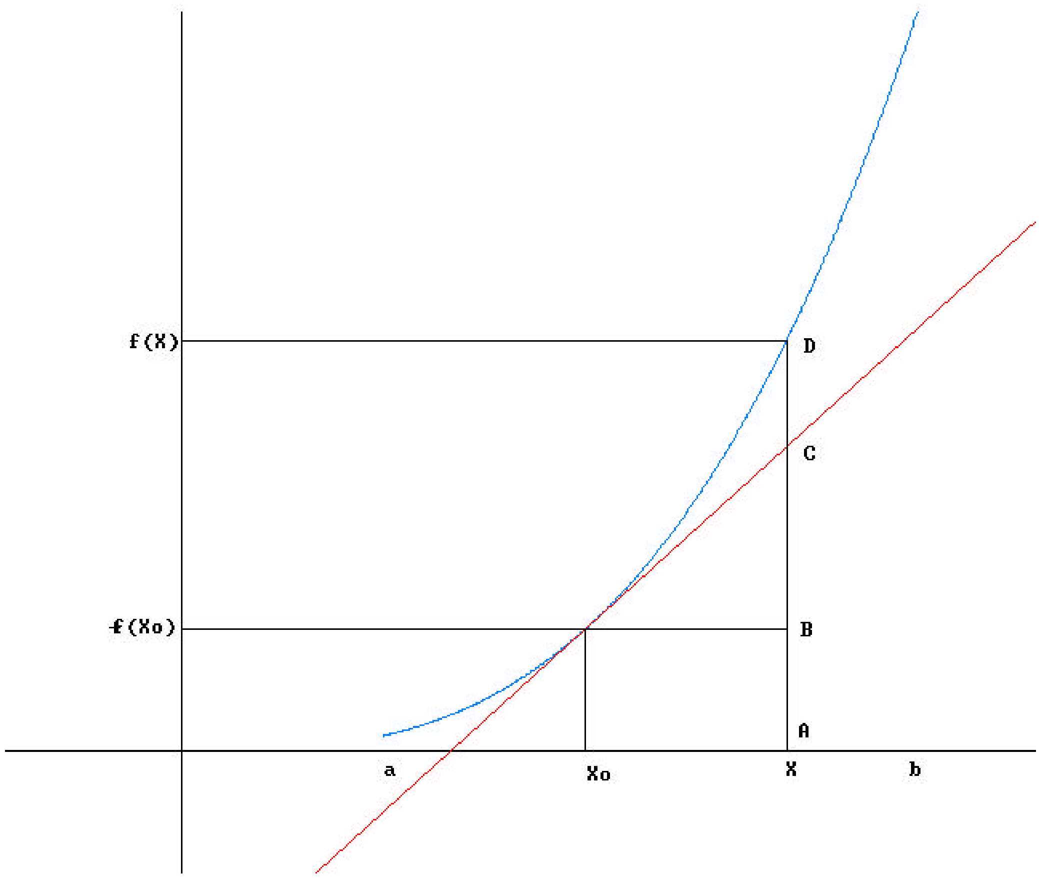
La serie di Taylor
(una applicazione del teorema di Lagrange)

Consideriamo la funzione $y = f(x)$ continua nell'intervallo chiuso $[a,b]$ e indefinitamente derivabile, con derivate limitate, nell'intervallo aperto (a,b). Se $x_0 \in (a,b)$ allora possiamo ad $f(x)$ una somma di infinite funzioni elementari detta serie di Taylor del tipo

1) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) =$$
$$= f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + .. + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + ...$$

dove (n) è l'ordine di derivazione ed $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

Supponiamo che il grafico della funzione si presenti come in figura (le considerazioni che facciamo sarebbero simili in presenza di un altro grafico)



Dal grafico si osserva che $f(x) = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ dove

$\overline{AB} = f(x_0)$
$\overline{BC} = (x - x_0) f'(x_0)$ che è il differenziale di $f(x)$ relativo al punto x_0 e all'incremento $(x - x_0)$
$\overline{CD} = R_n$ che è l'errore che commetto quando approssimo la curva con la tangente

Le considerazioni che abbiamo fatto discendono dal teorema di Lagrange applicato all'intervallo $[x_0, x]$. Infatti

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(h) \Rightarrow$$

2) $$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(h) \text{ con } x_0 < h < x$$

Ora essendo $f'(h)$ un numero il cui valore dipende dall'intervallo $[x_0, x]$ posso decidere di considerarlo come somma di $f'(x_0)$ (costante) e q variabile, data la continuità di $f'(x)$, per cui la 2) diventa

3) $$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)[f'(x_0) + q] \Rightarrow$$

4) $$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + (x - x_0) q$$

Che tipo di funzione deve essere questo q ?

Non può essere una costante poiché, essendo $f(x)$ derivabile in x_0 derivando la 4) si ottiene

$$f'(x) = f'(x_0) + q$$

da cui segue che q deve annullarsi per $x = x_0$.

La funzione più semplice che soddisfa a questo requisito è $q = K(x - x_0)$ con K costante. Perciò, sostituendo nella 4) si ottiene

5) $$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f^{'}(x_0) + (x - x_0)^2 K$$

Andiamo adesso alla ricerca di questo K. Derivando la 5), e riapplicando il teorema di Lagrange, si ottiene

$$f^{'}(x) = f^{'}(x_0) + 2(x - x_0)K \Rightarrow \frac{f^{'}(x) - f^{'}(x_0)}{x - x_0} = 2K = f^{''}(j) \Rightarrow K = \frac{f^{''}(j)}{2} \quad \text{con } x_0 < j < x.$$

Sostituendo nella 5) si ottiene infine

6) $$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f^{'}(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f^{''}(j)$$

dalla quale si ottiene che l'errore che commetto quando approssimo la curva con la tangente è

$R_2 = \frac{(x - x_0)^2}{2} f^{''}(j)$, chiamato resto, che come si vede dipende dall'ampiezza dell' intervallo $[x_0, x]$ e dalla derivata seconda (il pedice 2 di R corrisponde all'indice di derivazione).

Se adesso operiamo come nella 3), si ha

7) $$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f^{'}(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}[f^{''}(x_0) + K(x - x_0)] \Rightarrow$$

8) $$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f^{'}(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f^{''}(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{2} K$$

e derivando 2 volte la 8) si ottiene

9) $$f^{''}(x) = f^{''}(x_0) + 3(x - x_0)K \Rightarrow \frac{f^{''}(x) - f^{''}(x_0)}{x - x_0} = 3K = f^{'''}(f) \Rightarrow K = \frac{f^{'''}(f)}{3} \quad \text{con } x_0 < f < x$$

ed infine la

10) $$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f^{'}(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}f^{''}(x_0)+\frac{(x-x_0)^3}{6}f^{'''}(f)$$

con $R_3=\frac{(x-x_0)^3}{6}f^{'''}(f)$.

Se ripetiamo la serie di passaggi un'altra volta otteniamo

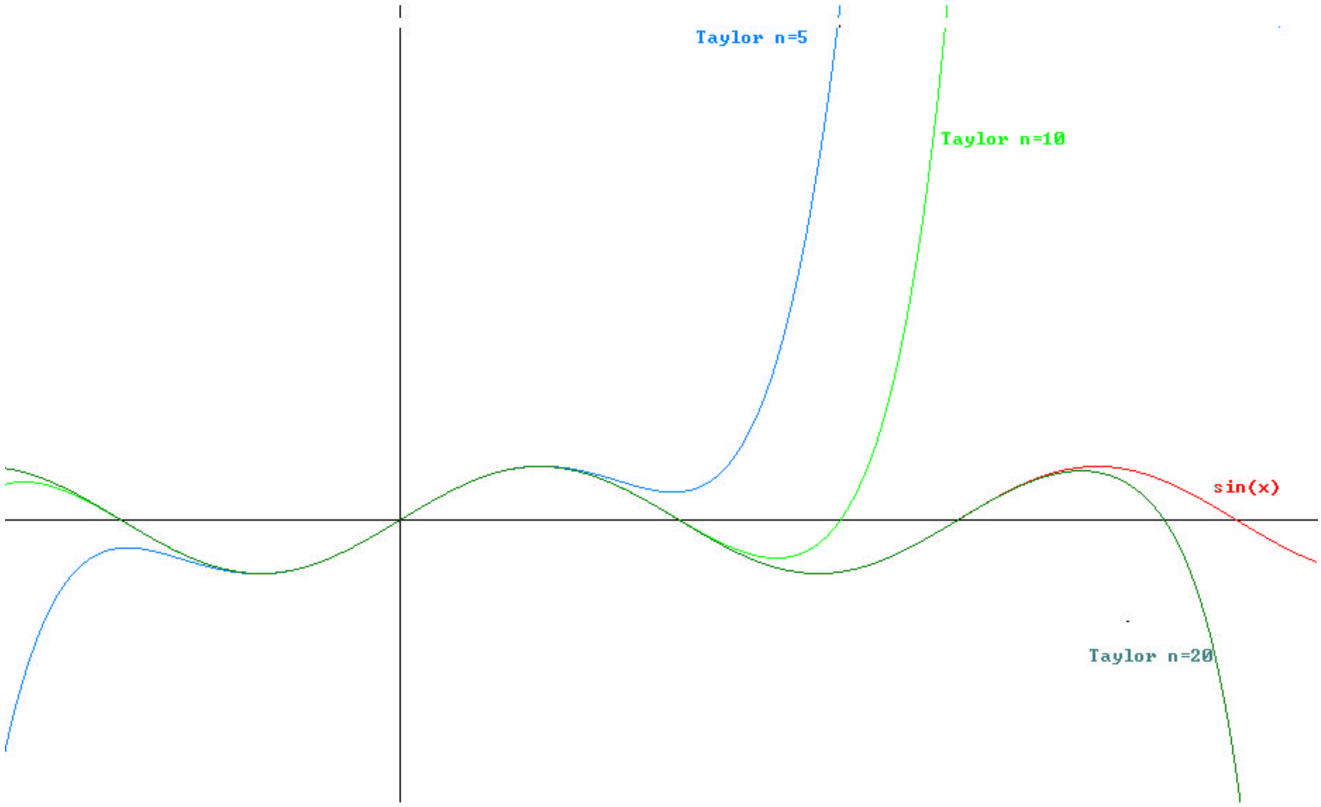
11) $$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f^{'}(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}f^{''}(x_0)+\frac{(x-x_0)^3}{6}f^{'''}(x_0)+\frac{(x-x_0)^4}{24}f^{IV}(x)$$

e questo fa capire come evolverà lo sviluppo dei termini successivi e quindi la 1).

Dal punto di vista grafico si evidenziano molto bene queste considerazioni

Consideriamo la funzione $y=\sin(x)$ e il suo corrispondente sviluppo in serie di Taylor

$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-.....=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ dove abbiamo posto $x_0=0$.



Come si può notare, se ci interessa un intervallo abbastanza limitato, per esempio, $\left[0,\frac{p}{2}\right]$, anche lo sviluppo per $n=5$ approssima molto bene la funzione.

Volendo calcolare

$$S=\int_0^{p/2}\sin(x)dx=[-\cos(x)]_0^{p/2}=1$$

se si usa lo sviluppo per $n=5$ si ha

$$S_5=\int_0^{p/2}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{720}\right]_0^{p/2}=1{,}00089$$

per $n=10$ si ha

$$S_{10}=\int_0^{p/2}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^9}{362880}\right)=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{720}-\frac{x^8}{40320}+\frac{x^{10}}{3628800}\right]_0^{p/2}=1$$

Altri esempi notevoli.

Se si considerano gli sviluppi in serie di e^x e $\cos(x)$ per $x_0=0$, si ha

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots..=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots..=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Sostituendo nello sviluppo di e^x ix al posto di x si ottiene

$$e^{ix}=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\frac{(ix)^5}{5!}+\ldots..=1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i\frac{x^5}{5!}+\ldots\Rightarrow$$

$$e^{ix}=\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots..\right]+i\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots..\right]=\cos(x)+i\sin(x)$$

identità di somma importanza detta formula di Eulero e ci mostra che, nel campo completo dei numeri (cioè dei numeri complessi), $\cos(x)$ e $\sin(x)$ sono intimamente legati alla funzione esponenziale.

Considerazioni didattiche:

1) l'uso di una calcolatrice scientifica permette di avere i valori delle funzioni goniometriche, iperboliche, logaritmi, potenze di qualsiasi base e qualsiasi esponente e i valori che appaiono sul display rimangono un mistero per lo studente che ha un minimo di curiosità culturale. Lo sviluppo in serie permette di soddisfare questa curiosità.

2) L'esempio fatto non è casuale. Nel calcolo integrale nella gran parte dei casi non esiste la primitiva della funzione integranda e pertanto, approssimare la funzione con il suo sviluppo in serie, offre, ove possibile, una stima dell' area che si sta cercando.

Unità didattica per la 5ª classe del liceo scientifico

Base di conoscenza:

- Teorema di Lagrange
- Concetti di derivata e differenziale di una funzione
- Algebra delle derivate
- Concetto di integrale definito
- Calcolo delle primitive

prof. Franco Pelini