Moltiplicazione di numeri reali

Il prodotto di due numeri reali a e b è definito geometricamente nel seguente modo: si costruisce la retta passante per l'origine 0 e per p=(1,b)=1+bi, si considera su questa retta il punto di ascissa a. L'ordinata di tale punto q è per definizione il prodotto ab. Il riporto da un asse all'altro è eseguibile mediante rette parallele al segmento congiungente le due unità reale e immaginaria. Dal punto di vista algebrico, invece, bisogna prima definire il prodotto nb per ogni intero n (tramite le formule ricorsive 1b := b e nb := (n-1)b + b). Successivamente si estende tale operazione al caso (m/n)b, con m intero (positivo o negativo) e n naturale non nullo, definendo: (m/n)b := m (b/n) (dopo aver dimostrato, tramite l'assioma di continuità, che b è divisibile in n parti). Infine si prende a reale qualunque si pone a 0 := 0 (caso in cui b=0) e, per b non nullo, si considerano i due insiemi :

$S_1(a,b) := \{ x : x \in R$, esistono $m \in Z$, $n \in N^+$, tali che $m/n \leq a$ e $x \leq (m/n)b \}$

$S_2(a,b) := \{ y : y \in R , y \notin S_1(a,b) \}$= complementare di $S_1(a,b)$ rispetto a R

Si dimostra che tali insiemi non sono vuoti e che $S_1(a,b)$ precede $S_2(a,b)$ (se fosse $y \leq x$, con x nel primo insieme e y nel secondo, seguirebbe che $y \leq (m/n)b$ e quindi y sarebbe nel primo insieme). Allora ab è definito come l'elemento di separazione di $S_1(a,b)$ e $S_2(a,b)$, esistente per l'assioma di continuità.