

## ROTAZIONI (E TEOREMA DI PITAGORA)

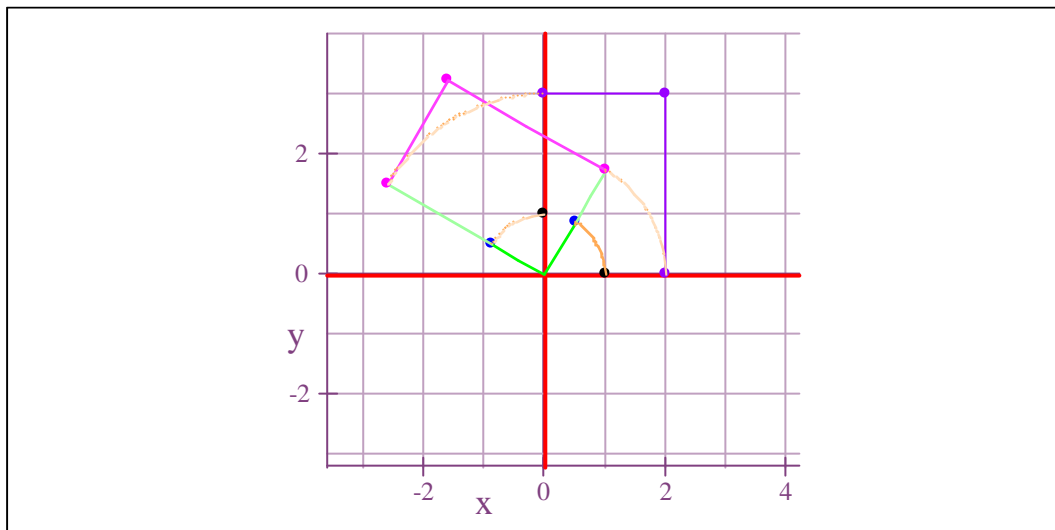
## Definizione

Definiamo rotazione nel piano  $\mathbb{R}^2$  una funzione  $(x,y) \rightarrow f(x,y) = (x',y') \in \mathbb{R}^2$ , tale che :

**1)**  $f(x,y) = x f(1,0) + y \text{ort}(f(1,0))$  , per ogni  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$       dove :  $\text{ort}(a,b) := (-b,a)$   
"ortogonale (antiorario)"  
di  $(a,b)$  .

in parole: il punto ruotato di un qualunque punto ha, rispetto al sistema di riferimento ruotato con la stessa rotazione, le stesse coordinate del punto di partenza.

## visualizzazione

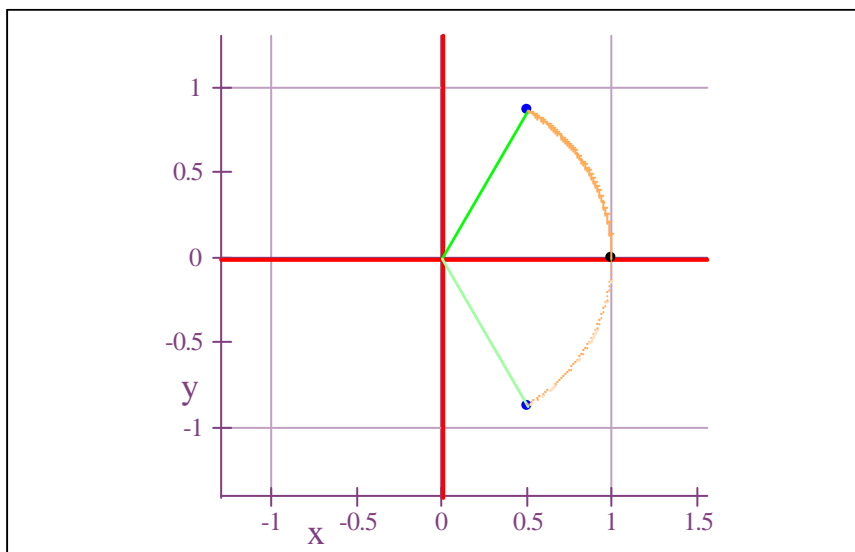


**2)**  $f(\text{con}(f(1,0))) = (1,0)$

dove :  $\text{con}(a,b) := (a,-b)$   
"coniugato" di  $(a,b)$ .

in parole: il simmetrico rispetto all'asse delle ascisse del punto ruotato di  $(1,0)$ , ossia del punto unità, sottoposto alla stessa rotazione restituisce lo stesso  $(1,0)$ .

## visualizzazione



## Equazioni

Usiamo le proprietà 1 e 2 di una rotazione per scrivere delle regole :

## Regole

Upon **Simplify** transform  $\text{ort}(\underline{x}, \underline{y})$  into  $(-\underline{y}, \underline{x})$ .

Upon **Simplify** transform  $\text{con}(\underline{x}, \underline{y})$  into  $(\underline{x}, -\underline{y})$ .

Upon **Expand** transform  $f(\underline{x}, \underline{y})$  into  $\underline{x} f(1, 0) + \underline{y} \text{ort}(f[1, 0])$ .

Upon **Transform** transform  $f([f\{1, 0\}]_1, -[f\{1, 0\}]_2)$  into  $(1, 0)$ .

regole di scalarizzazione :

Upon **Transform** transform  $(\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{u}, \underline{v})$  into  $\underline{x} = \underline{u}$ .

Upon **Transform** transform  $(\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{u}, \underline{v})$  into  $\underline{y} = \underline{v}$ .

estrazione di radice quadrata

Upon **Transform** transform  $\underline{x}^2 = \underline{y}$  into  $(\underline{x} = \sqrt{\underline{y}}) + (\underline{x} = -\sqrt{\underline{y}})$ .

Proprietà dedotte :

rotazione dell'unità otogonale (0,1) :

$f(0, 1)$

$f(0, 1) = \text{ort}(f[1, 0])$  Expand

espressione di una rotazione e vincolo su  $f(1, 0)$  :

se :

$f(1, 0) = (a, b)$

$f(x, y) = (x', y')$

allora :

$f(x, y)$

$f(x, y) = f(1, 0)x + \text{ort}(f[1, 0])y$  Expand

$f(x, y) = (a, b)x + (-b, a)y$  Substitute

$(x', y') = (a, b)x + (-b, a)y$  Substitute

$(x', y') = (ax - by, bx + ay)$  Expand

$x' = ax - by$  Transform

$y' = bx + ay$  Transform

$f(a, -b)$

$f(a, -b) = af(1, 0) - b \text{ort}(f[1, 0])$  Expand

$f(a, -b) = -b(-b, a) + a(a, b)$  Substitute

$f(a, -b) = (a^2 + b^2, 0)$  Expand

$f([f\{1, 0\}]_1, -b) = (a^2 + b^2, 0)$  Substitute

$f([f\{1, 0\}]_1, -[f\{1, 0\}]_2) = (a^2 + b^2, 0)$  Substitute

$(1, 0) = (a^2 + b^2, 0)$  Transform

$1 = a^2 + b^2$  Transform

$a^2 + b^2 = 1$  Isolate questa è una delle forme  
del teorema di Pitagora

quindi :

$b^2 = -a^2 + 1$  Isolate

$(b = \sqrt{-a^2 + 1}) + (b = -\sqrt{-a^2 + 1})$  Transform

modulo di un punto (x,y)

se :  $f$  è una rotazione,  $m$  è un numero non negativo e

$f(m, 0) = (x, y)$

allora :

$$f(1,0)m = \langle x, y \rangle \quad \text{Expand}$$

$$\langle a, b \rangle m = \langle x, y \rangle \quad \text{Substitute}$$

$$\langle am, bm \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{Expand}$$

$$am = x \quad \text{Transform}$$

$$bm = y \quad \text{Transform}$$

$$x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 = \langle am \rangle^2 + y^2 \quad \text{Substitute}$$

$$x^2 + y^2 = \langle am \rangle^2 + \langle bm \rangle^2 \quad \text{Substitute}$$

$$x^2 + y^2 = a^2 m^2 + b^2 m^2 \quad \text{Expand}$$

$$x^2 + y^2 = \langle a^2 + b^2 \rangle m^2 \quad \text{Collect}$$

$$x^2 + y^2 = m^2 \quad \text{Substitute}$$

$$m^2 = x^2 + y^2 \quad \text{Isolate}$$

$$m = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{Isolate}$$

$m$  è detto "modulo" di  $(x,y)$   
ed esprime la distanza di  $(x,y)$   
dall'origine  $(0,0)$ .

visualizzazione

