

SCALE MUSICALI E LOGARITMO IN BASE 2

Gaetano Speranza

Possiamo legare la frequenza di una nota alla **lunghezza** di una corda che vibrando la produce. Dimezzando tale lunghezza, abbiamo la nota omonima successiva (più alta), ossia quella con frequenza doppia. Fra la lunghezza associata ad una certa nota di riferimento (indicata con do_0) e la lunghezza (dimezzata) della nota omonima immediatamente più alta (do_1) sussiste un intervallo di valori, ognuno dei quali ha un certo rapporto con la lunghezza di do_0 . Tale intervallo è detto ottava per via della sua suddivisione effettuata dalla scala pitagorica in sette parti tramite sei note inserite fra do_0 e do_1 , in modo che do_1 viene ad essere la ottava nota della sequenza che parte da do_0 .

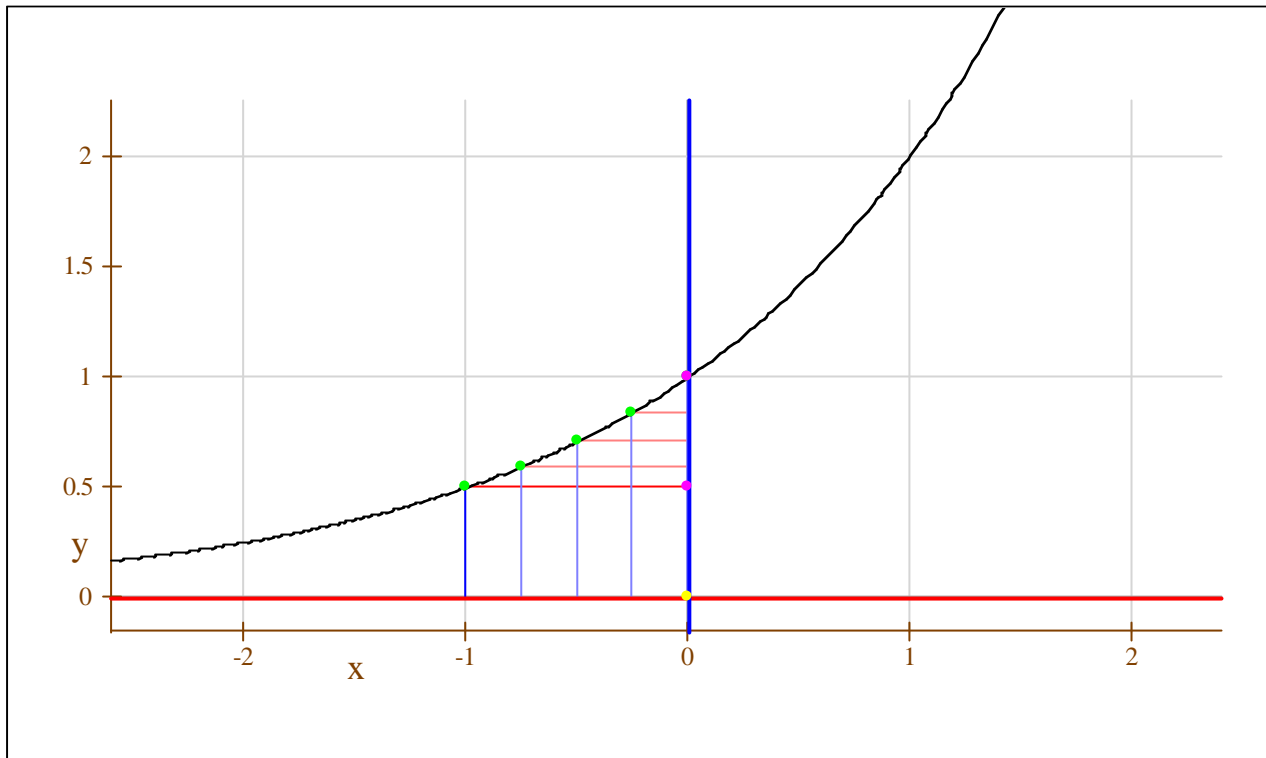
Così facendo si determina la suddivisione di tutto l'asse delle lunghezze associate a note (ognuna con una corrispondente frequenza) in ottave, di cui quella compresa fra do e do è detta principale). Ogni ottava può essere suddivisa in base agli stessi rapporti tramite i quali si suddivide l'ottava principale (e non necessariamente in 7 parti).

Rappresentando le lunghezze delle note sull'asse delle ordinate come valori della y dati dalla funzione $y = 2^x$, si può ricavare l'ascissa x corrispondente alla y mediante la funzione logaritmo in base 2 (\log_2), e così facendo a tutte le ottave corrispondono intervalli uguali sull'asse delle ascisse, precisamente intervalli unitari. Pertanto, per mantenere costante il rapporto fra ogni nota e la successiva (rapporto delle lunghezze) bisogna mantenere costante la differenza delle loro ascisse.

L'ottava principale è associata al numero 0 (con la **lunghezza** di do_0 pari a 1, da leggersi sull'asse delle ordinate, fino alla lunghezza di do_1 , pari a $\frac{1}{2} = 2^{-1}$), il quale può essere modificato con altri numeri interi positivi o negativi per ottenere le ottave più alte o quelle più basse. L'altezza delle note cresce spostandosi verso il basso sull'asse delle ordinate, quindi verso sinistra sull'asse delle ascisse.

Suddivisione in ottave

ottava = 0 suddivisione = 4



Scala pitagorica e scala dodecatonale

La scala pitagorica costruisce la suddivisione dell'ottava principale determinando le lunghezze di tali note dalla lunghezza della nota principale (do_0) tramite moltiplicazioni delle lunghezze per numeri razionali, utilizzando le frazioni (rapporti) $\frac{2}{3}$ (che porta a note più alte, in quanto è inferiore ad 1 e quindi abbassa il prodotto,

alzandolo quindi acusticamente) e $\frac{3}{2}$ (che porta a note più basse, in quanto è superiore ad 1 e quindi aumenta il prodotto, abbassando quindi acusticamente la relativa nota). Quando con tali moltiplicazioni si esce dall'ottava, si riconduce la nota trovata a quella omonima (o omologa) della ottava principale.

Ad esempio, moltiplicando la lunghezza (unitaria) del do_0 per $\frac{2}{3}$ si ottiene una nuova

nota e non si esce dalla ottava principale, e quindi si ottiene una nota da considerare per la suddivisione (denominata sol_0). Se poi si procede a moltiplicare tale nuova

lunghezza ancora per lo stesso rapporto $\frac{2}{3}$, si cade nell'ottava successiva (ottenendo

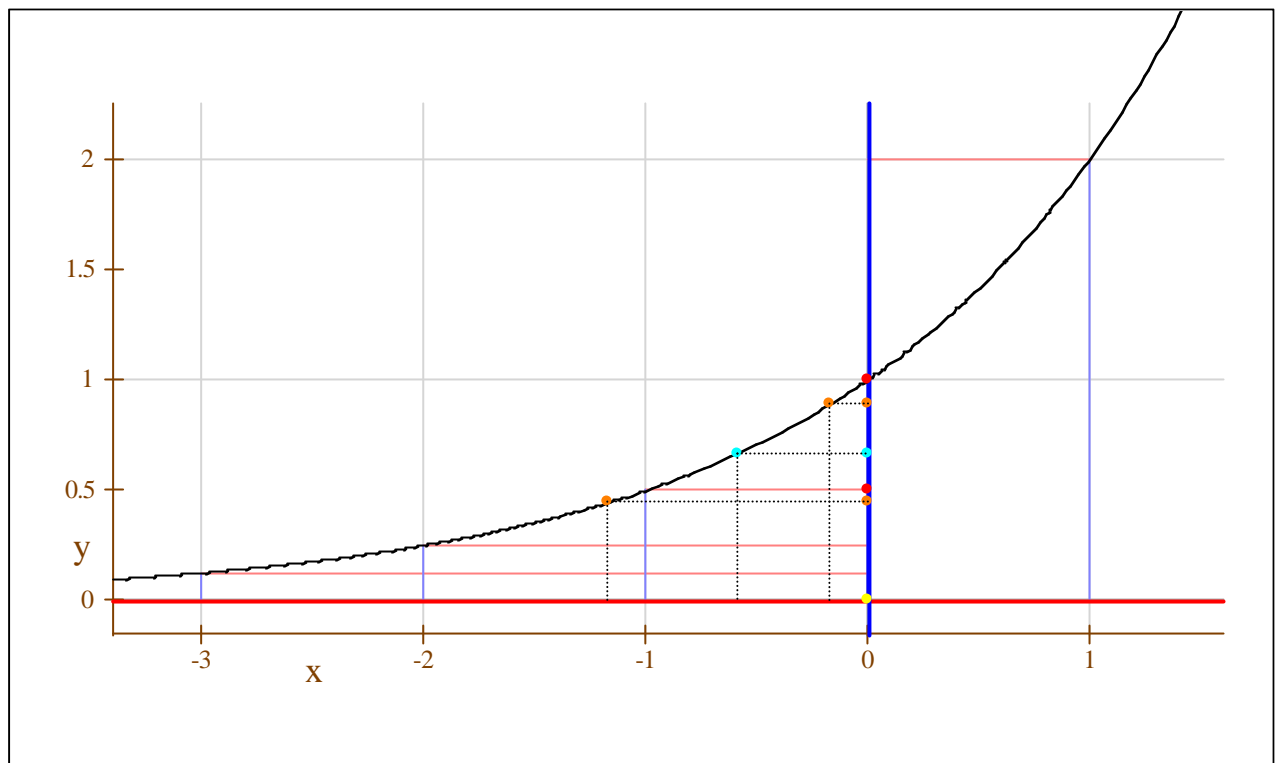
una nota denominata re_1), per cui va considerata non tale lunghezza, bensì quella relativa alla nota omologa (re_0) cui può essere ricondotta la lunghezza trovata :

$$\text{nuova}(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3} \times \text{do}_0 = 1 \quad \text{do}_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{sol}_0 = \text{nuova}(\text{do}_0) \quad \text{sol}_0 = \frac{2}{3}$$

$$\text{re}_1 = \text{nuova}(\text{nuova}[\text{do}_0]) \quad \text{re}_1 = \frac{4}{9}$$

$$\text{re}_0 = 2 \text{re}_1 \quad \text{re}_0 = \frac{8}{9}$$



Procedendo come sopra otteniamo le altre seguenti note :

$$la_0 = \text{nuova}(re_0) \quad la_0 = \frac{16}{27}$$

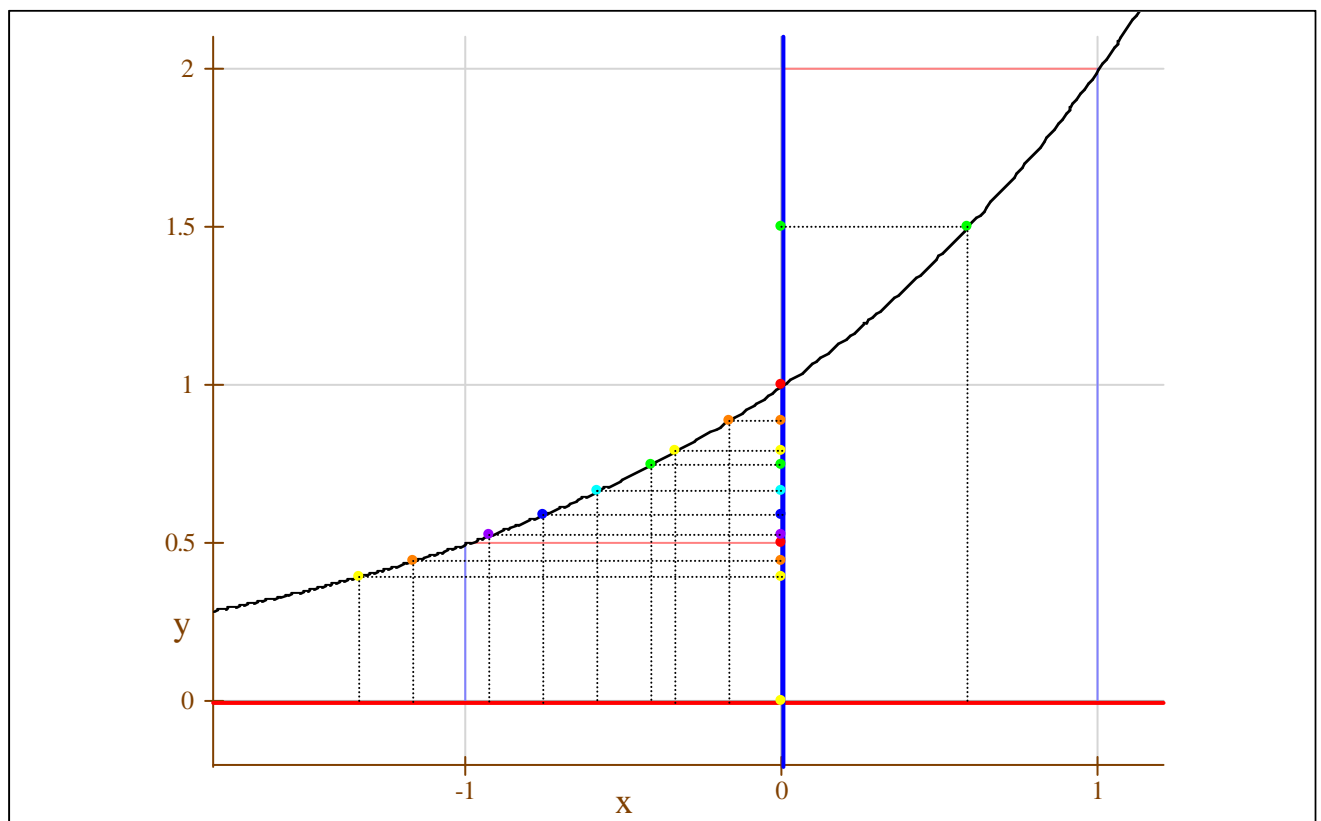
$$mi_1 = \text{nuova}(la_0) \quad mi_1 = \frac{32}{81}$$

$$mi_0 = 2 mi_1 \quad mi_0 = \frac{64}{81}$$

$$si_0 = \text{nuova}(mi_0) \quad si_0 = \frac{128}{243}$$

mentre con la moltiplicazione per la frazione $\frac{3}{2}$ otteniamo :

$$fa_{-1} = \frac{3}{2} \quad fa_0 = \frac{1}{2} fa_{-1} \quad fa_0 = \frac{3}{4}$$



L'osservazione dei rapporti fra le note pitagoriche trovate conduce a rilevare che il rapporto fra una di esse e la successiva della suddivisione non è sempre lo stesso, bensì lo scarto fra mi_0 e fa_0 e quello fra si_0 e do_1 sono uguali fra loro e la differenza fra le loro ascisse risulta pari a circa metà della differenza rilevata (sempre considerando le ascisse, che permettono di ragionare additivamente invece che moltiplicativamente, ossia per differenze anziché per rapporti) fra due altre coppie di note.

$$\begin{array}{lll}
 \frac{do_0}{re_0} & \frac{do_0}{re_0} = \frac{9}{8} & \frac{do_0}{re_0} = \frac{3^2}{2^3} \\
 \frac{re_0}{mi_0} & \frac{re_0}{mi_0} = \frac{9}{8} & \\
 \frac{mi_0}{fa_0} & \frac{mi_0}{fa_0} = \frac{256}{243} & \frac{mi_0}{fa_0} = \frac{2^8}{3^5} \\
 \frac{fa_0}{sol_0} & \frac{fa_0}{sol_0} = \frac{9}{8} & \\
 \frac{sol_0}{la_0} & \frac{sol_0}{la_0} = \frac{9}{8} & \\
 \frac{la_0}{si_0} & \frac{la_0}{si_0} = \frac{9}{8} & \\
 \frac{si_0}{do_1} & \frac{si_0}{do_1} = \frac{256}{243} &
 \end{array}$$

Nasce così naturalmente la nozione di semitono, come intervallo (come rapporto, o ,
logaritmicamente, come differenza) relativo alle suddette coppie particolari di note. E
nasce così l'esigenza di suddividere l'ottava in 12 parti.

$$\begin{array}{lll}
 \text{tono} = \frac{9}{8} & \text{semitono} = \frac{256}{243} & \\
 \text{semitono}^2 & \text{semitono}^2 = \left(\frac{256}{243}\right)^2 & \text{semitono}^2 = \frac{65536}{59049} \\
 \frac{\text{tono}}{\text{semitono}^2} & \frac{\text{tono}}{\text{semitono}^2} = \frac{9}{8} \frac{1}{\left(\frac{256}{243}\right)^2} & \frac{\text{tono}}{\text{semitono}^2} = \frac{531441}{524288} \\
 \frac{\text{tono}}{\text{semitono}^2} = 1.0136 & \text{tono} = 1.0136 \text{semitono}^2 & \\
 \log_2 \left(\frac{\text{tono}}{\text{semitono}^2} \right) = \log_2 \left(\frac{531441}{524288} \right) & \log_2 \left(\frac{\text{tono}}{\text{semitono}^2} \right) = \log_2 (531441) - 19 & \\
 \log_2 \left(\frac{\text{tono}}{\text{semitono}^2} \right) = 19.02 - 19 & &
 \end{array}$$

Produzione di nuove note tramite il numero 3 :

La seguente funzione produce direttamente note dell'ottava principale :

$$\text{nuovanota}(\mathbb{k}) = \frac{2^{\text{floor}\left(\log_2 \left[3^{\mathbb{k}}\right]\right)}}{3^{\mathbb{k}}}$$

Note della suddivisione pitagorica in sette parti :

do₀

$$\text{nuovanota}(0) = 1$$

sol₀

$$\text{nuovanota}(1) = \frac{2}{3}$$

re₀

$$\text{nuovanota}(2) = \frac{8}{9}$$

la₀

$$\text{nuovanota}(3) = \frac{16}{27}$$

mi₀

$$\text{nuovanota}(4) = \frac{64}{81}$$

si₀

$$\text{nuovanota}(5) = \frac{128}{243}$$

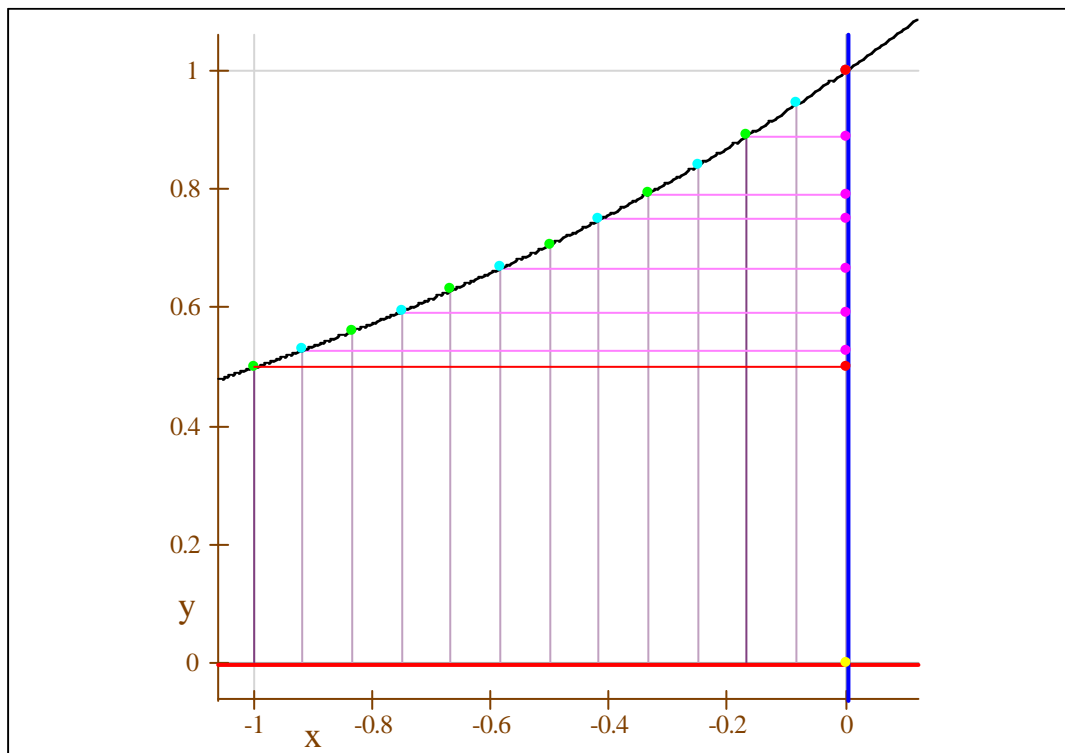
A questo punto raggiungiamo la distanza di un semitono da do₁

L'ultimo passo è quello di colmare lo spazio fra mi₀ e sol₀ :

fa₀

$$\text{nuovanota}(-1) = \frac{3}{4}$$

$$\text{nuovanota}(1) = \frac{x}{\text{tono}} \quad x = \frac{3}{4}$$

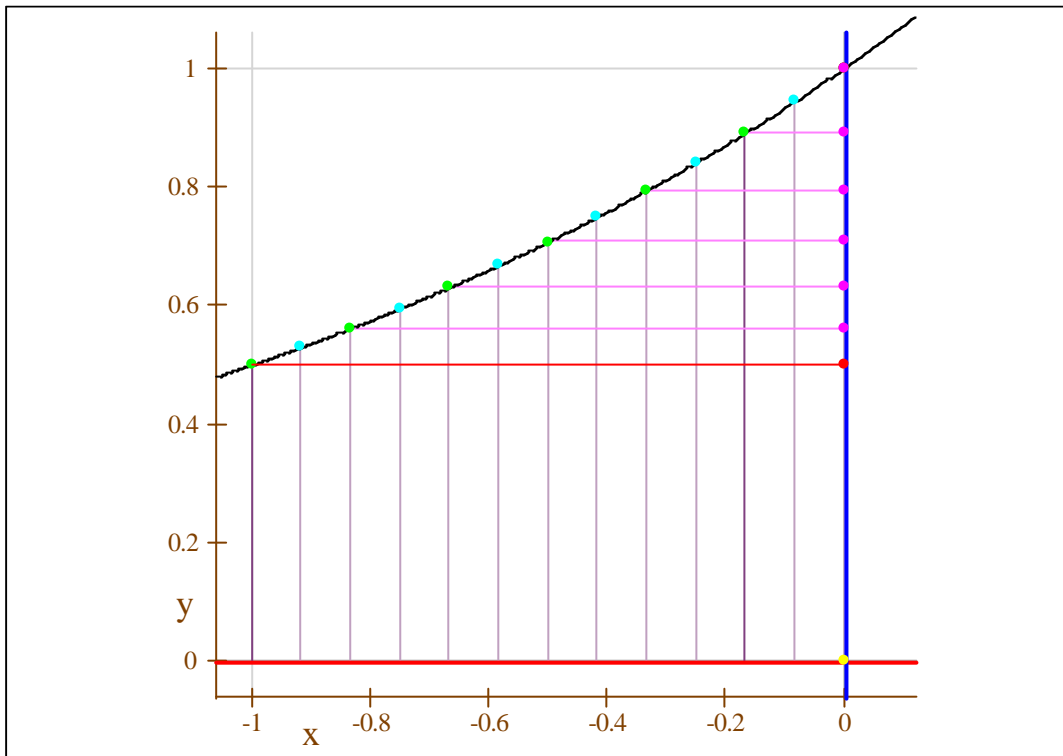


notiamo che se invece del numero 3 usiamo altre quantità la suddivisione in genere cambia e non è regolare :

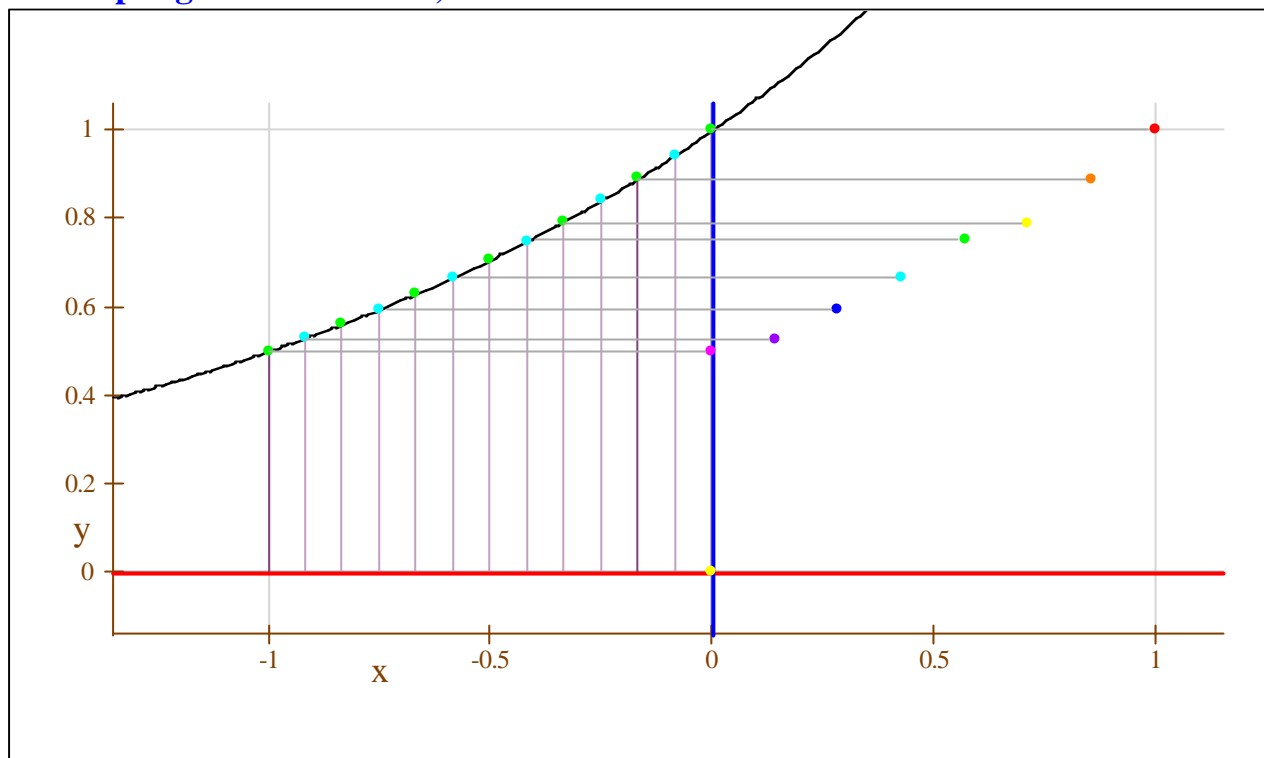
$$\text{nuovanotagen}(\mathbb{k}, \mathbb{m}) = \frac{2^{\text{floor}\left(\log_2\left[\mathbb{m}^{\mathbb{k}}\right]\right)}}{\mathbb{m}^{\mathbb{k}}}$$

Curiosamente, con 57 al posto di 3 approssimiamo la scala esatonale esatta :

$$n = 57 \quad k_{\min} = 0 \quad k_{\max} = 5$$



Scala pitagorica ettatonale, ossia a sette note



Moltiplicando ogni lunghezza di nota per il semitono otteniamo approssimativamente la suddivisione in dodici parti. Ogni nota, divisa per il semitono, dà luogo ad una nota indicata con lo stesso nome con l'aggiunta del termine "diesis", mentre moltiplicata per il semitono dà luogo ad una nota indicata con lo stesso nome con l'aggiunta del termine "bemolle".

$$\text{diesis} \left(\frac{x}{\text{semitono}} \right) = \frac{x}{\text{semitono}}$$

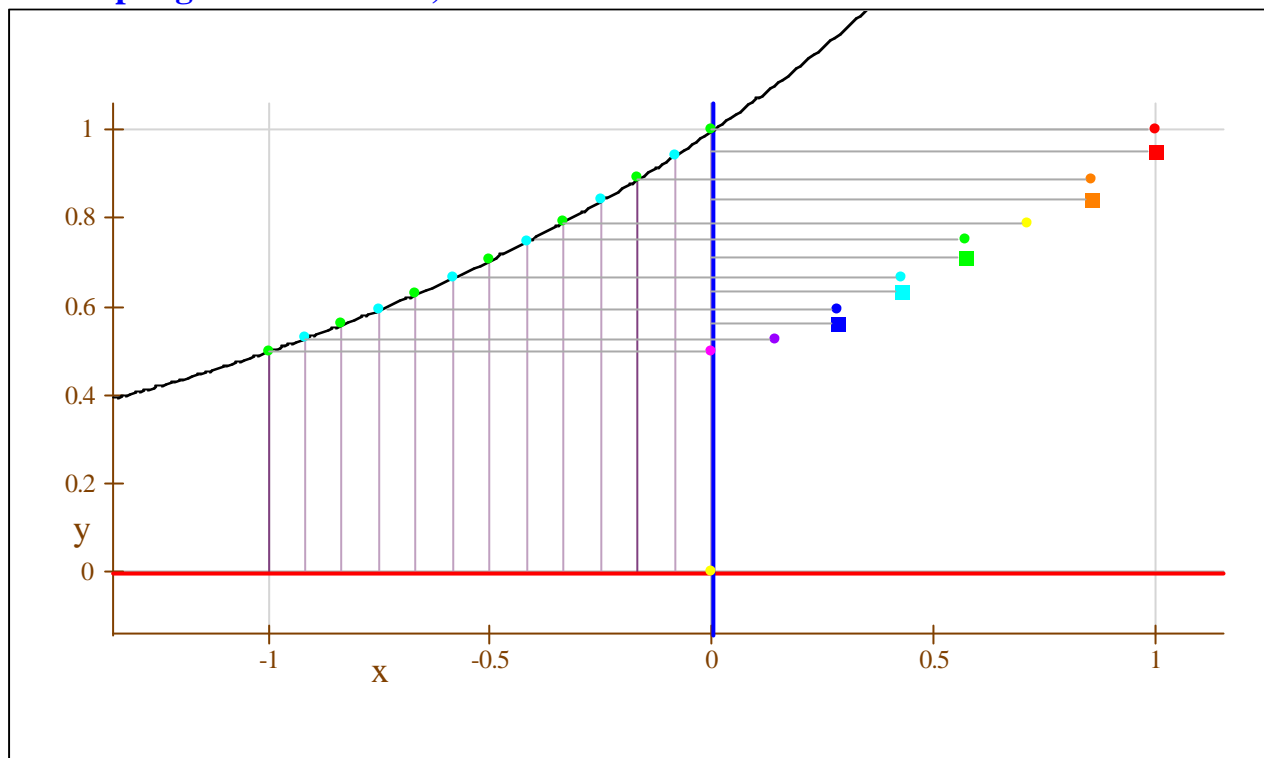
$$\text{bemolle} \left(\frac{x}{\text{semitono}} \right) = x \cdot \text{semitono}$$

Anche se l'operatore diesis e l'operatore bemolle non producono esattamente la stessa suddivisione, in pratica la distanza fra le note corrispondenti nelle scale diesizzata e bemollizzata sono trascurabili. Esse differiscono per un rapporto (indipendente dalla nota di partenza) detto "comma pitagorico", pari al quadrato del semitono :

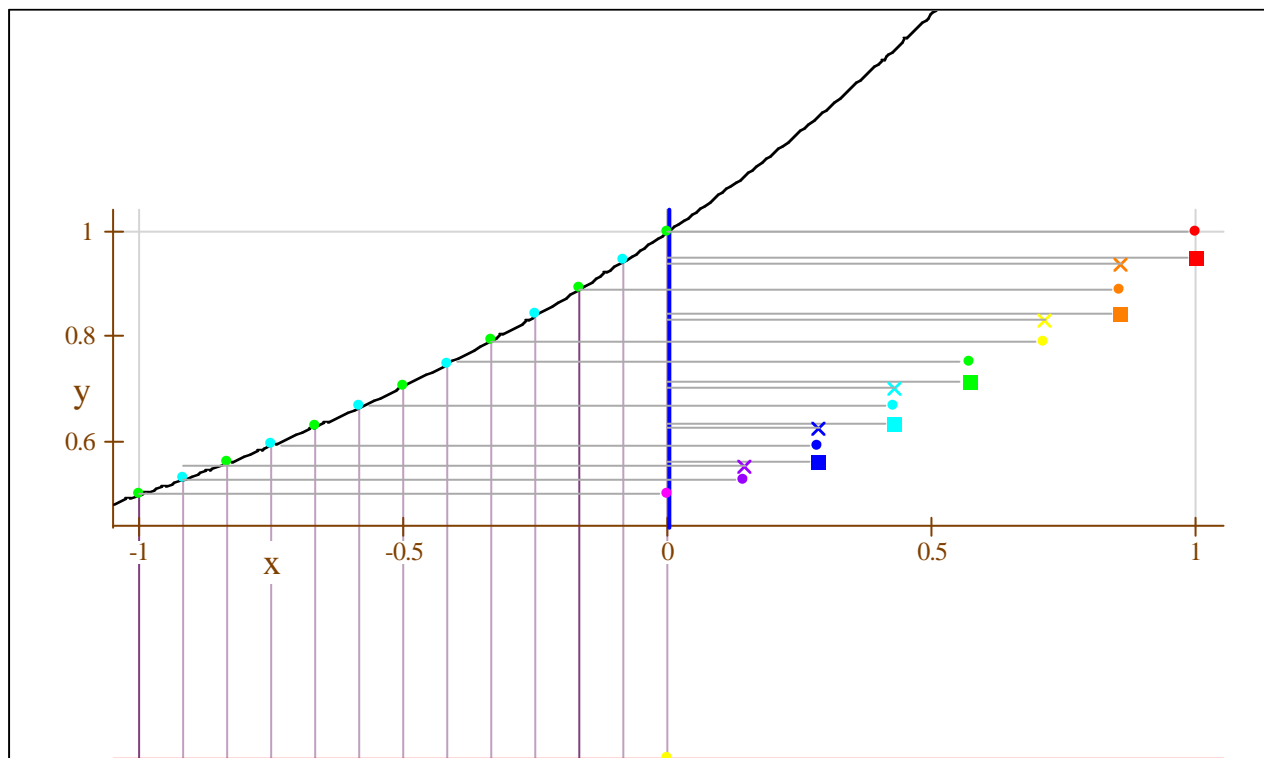
$$\frac{\text{bemolle} \left(\frac{x}{\text{semitono}} \right)}{\text{diesis} \left(\frac{x}{\text{semitono}} \right)} = \left(\frac{256}{243} \right)^2$$

$$\frac{\text{bemolle} \left(\frac{x}{\text{semitono}} \right)}{\text{diesis} \left(\frac{x}{\text{semitono}} \right)} = 1.1099$$

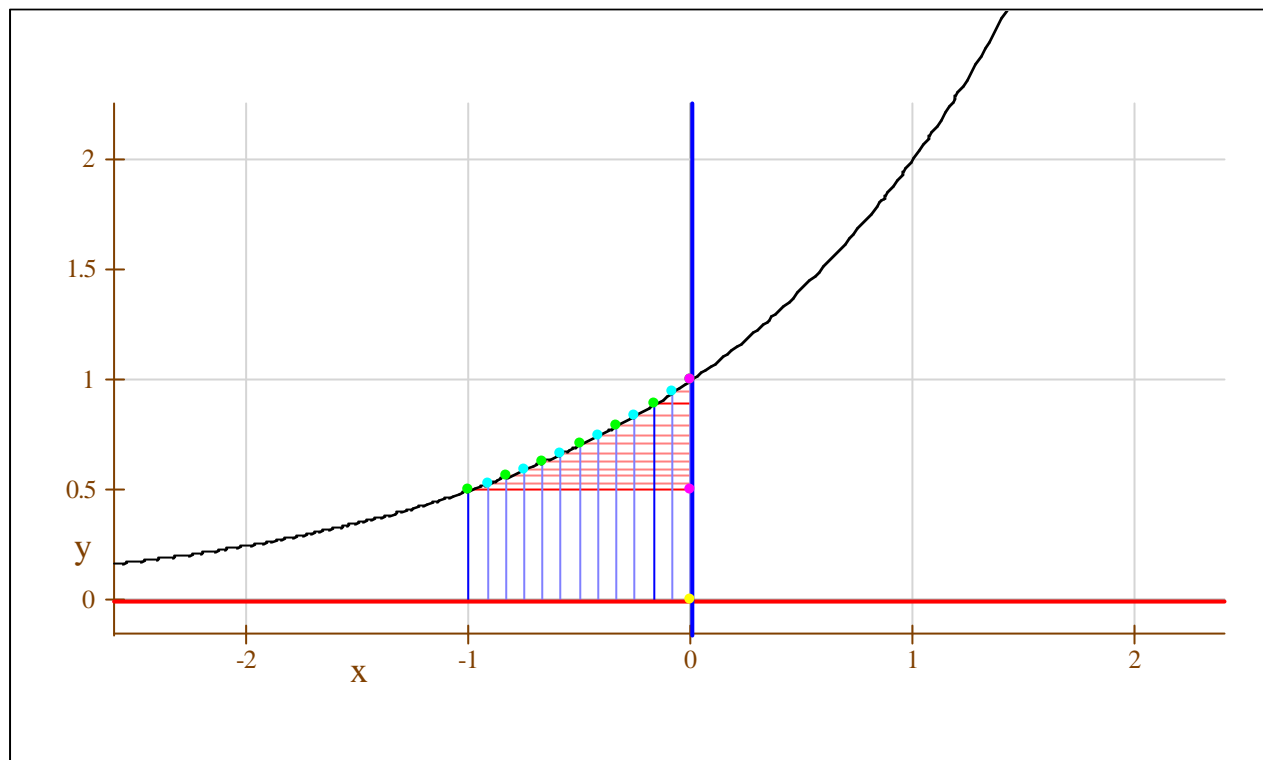
Scala pitagorica diesizzata, con dodici note



differenza scala diesizzata e scala bemollizzata



Suddivisione dodecatonale esatta di una ottava



Il rapporto fra una generica nota e quella immediatamente più alta acusticamente (quindi immediatamente al di sotto nella rappresentazione grafica) è la radice dodicesima di 2 , che è un numero irrazionale :

$$r = 2^{\frac{-1 + \frac{k+1}{12}}{-1 + \frac{k}{12}}}$$

$$r = 2^{\frac{1}{12}(k+1) - \frac{1}{12}k}$$

$$r = 2^{\frac{1}{12}}$$