ARTICOLO GIÀ PUBBLICATO DALLA RIVISTA "Progetto Alice" 2004 I vol. V n° 13

La matematica della scala musicale

Stefano Busiello

Riassunto
In questo articolo mostriamo la semplice ma geniale intuizione matematica che ha generato il nostro attuale sistema musicale (il sistema temperato). Mostreremo quindi come matematica e musica non siano due discipline in antitesi, ma legate da un profondo connubio, troppo spesso dimenticato.

Abstract
In this article we show the simple but bright mathematics intuition that generated the present musical system (the tempered system). We show that the mathematics and the music are not antithetic disciplines, but are closely connected by a strong union. Unfortunately this union is often forgotten.

Stefano Busiello
Scuola superiore statale IPCT "Axel Munthe" di Anacapri
Conservatorio "S. Pietro a Majella" di Napoli
e-mail:
stefano.busiello@unina2.it

Matematica e musica: due discipline inconciliabili?

C'è sempre stato uno stretto connubio tra musica e matematica. I musicisti del passato hanno potuto realizzare i loro capolavori grazie al nostro sistema musicale che si basa su delle precise regole matematiche codificate dai grandi teorici musicali. Eppure questo stretto connubio tra le due discipline è stato dimenticato, al punto che matematica e musica sono state considerate in antitesi e inconciliabili. Oggi però, la musica classica contemporanea, nella ricerca di nuovi linguaggi, si sta sempre più servendo della matematica. In particolare, l'avvento del computer ha dato un notevole impulso allo sviluppo di nuove branche della musica come la musica algoritmica e la musica elettronica. Sono sempre più comuni figure di musicisti scienziati che, per far fronte alle rinnovate esigenze

espressive, uniscono alla cultura musicale anche un’adeguata preparazione scientifica. Non si confonda però la musica elettronica con la musica prodotta con strumenti elettronici. La gran parte della musica leggera ad esempio, utilizza suoni elettronici come tastiere e computer, ma non presenta innovazioni nel linguaggio che, anzi, spesso, per molti aspetti armonici e melodici, si trova saldamente ancorato ai canoni della musica dei secoli passati. La musica elettronica propriamente detta presenta innovazioni del linguaggio dovute proprio alle nuove possibilità del mezzo elettronico. È questa la musica in cui si fa largo uso di matematica e di conoscenze scientifiche in generale. Purtroppo, spesso, questa musica non viene apprezzata e vista con diffidenza, non solo perché è una musica molto differente da quella che si ascolta tutti i giorni, ma anche perché è nata con l’ausilio della matematica. Molti si chiedono come la musica, espressione della più irrazionale emotività, possa aver qualcosa a che fare con la fredda e razionale matematica. Ma è proprio vero che la musica è solo emotività e fantasia e la matematica è solo razionalità? Difficilmente ci si immagina invece quanta razionalità possa esistere in una fuga di Bach o in una sinfonia di Beethoven e quanta fantasia e creatività in alcune teorie matematiche. Se la musica fosse solo istinto, il corso di Composizione al Conservatorio non durerebbe certo ben 10 anni! Cosa si potrebbe mai insegnare all’istinto?
In realtà anche la musica che si sente tutti i giorni basa le sue fondamenta su principi matematici evolutisi per millenni e adattandosi a mano a mano alla musica che si trasforma.

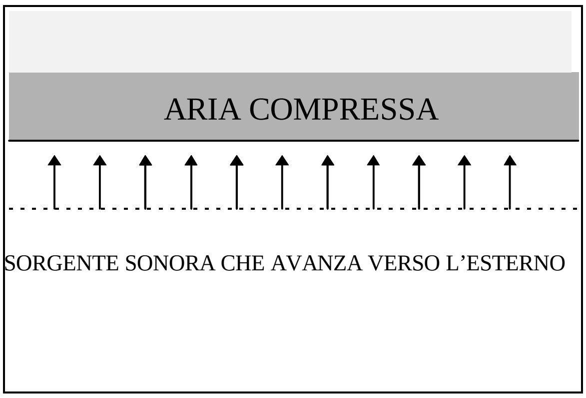
Le onde sonore

Senza parlare di tutta la matematica presente nella musica nel corso della storia, ci limiteremo ad illustrare come uno dei principi fondamentali su cui si basa tutta la musica occidentale, ossia le sette note, sono il frutto non dell’irrazionalità e dell’istinto, ma di solidi ragionamenti matematici.
Per far ciò introdurremo in maniera non rigorosa alcune nozioni basilari di acustica e di musica.
Ogni fenomeno acustico, cioè ogni cosa che si percepisce con l’udito è il risultato di compressioni e rarefazioni dell’aria che si alternano rapidamente. Il corpo che causa queste compressioni e rarefazioni si chiama *sorgente sonora*.

Una sorgente sonora (ad esempio una corda di chitarra) vibrando agita le molecole dell’aria circostante. Queste, oscillando, mettono a loro volta in agitazione le molecole vicine.
Più dettagliatamente, consideriamo una sorgente sonora vibrante.

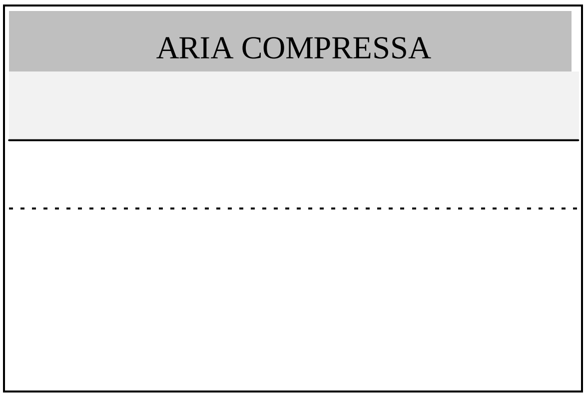
(fig. 1)

In un primo momento le molecole della sorgente avanzano verso l’esterno della sorgente comprimendo lo strato d’aria adiacente.



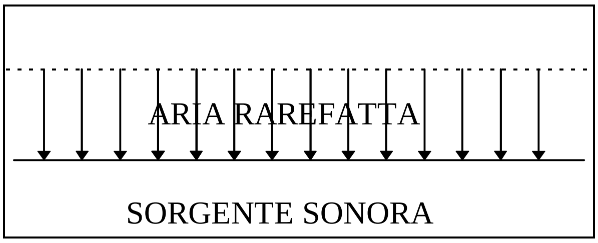
(fig. 2)

Lo strato d’aria compressa comprime lo strato d’aria più avanti.



(fig. 3)

Si propaga quindi una compressione d’aria.
In un secondo momento la sorgente sonora, per il suo moto di vibrazione, va verso il basso. Si crea uno strato d’aria rarefatta.

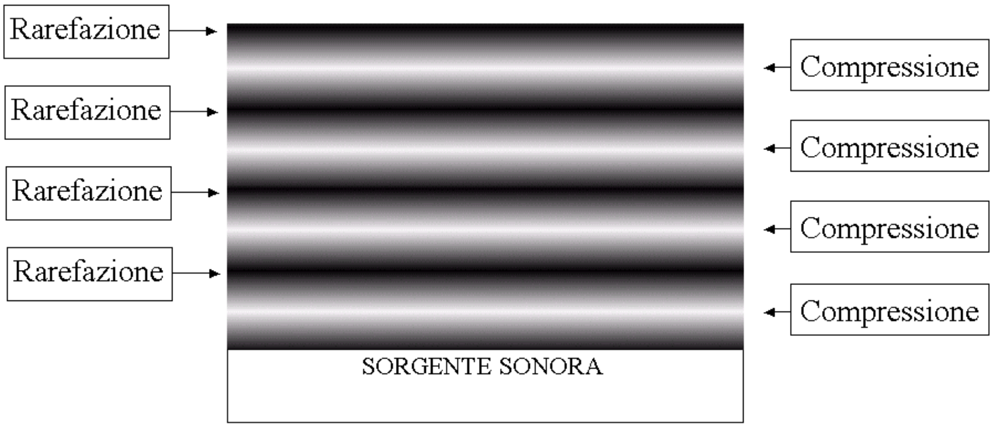


(fig. 4)

Questo vuoto viene colmato dallo strato d’aria adiacente che a sua volta lascia un altro strato d’aria rarefatta.
Si propaga così una rarefazione d’aria.

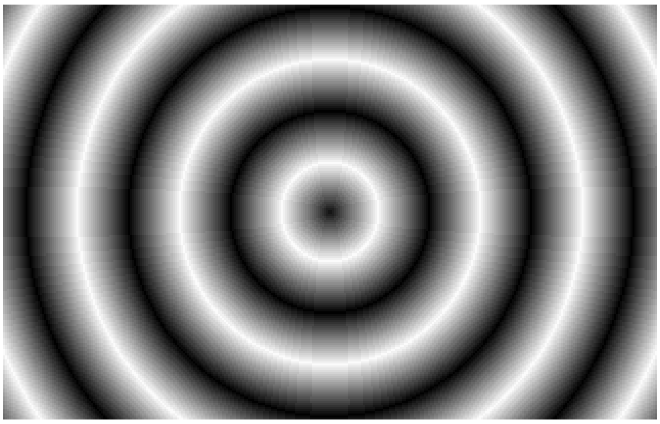
(fig. 5)

Si ha quindi un movimento oscillatorio delle molecole dell'aria che si propaga e provoca le compressioni e rarefazioni dell'aria che, non appena giungono alle nostre orecchie, vengono percepite da noi come fenomeni acustici (suoni o rumori).



(fig. 6)

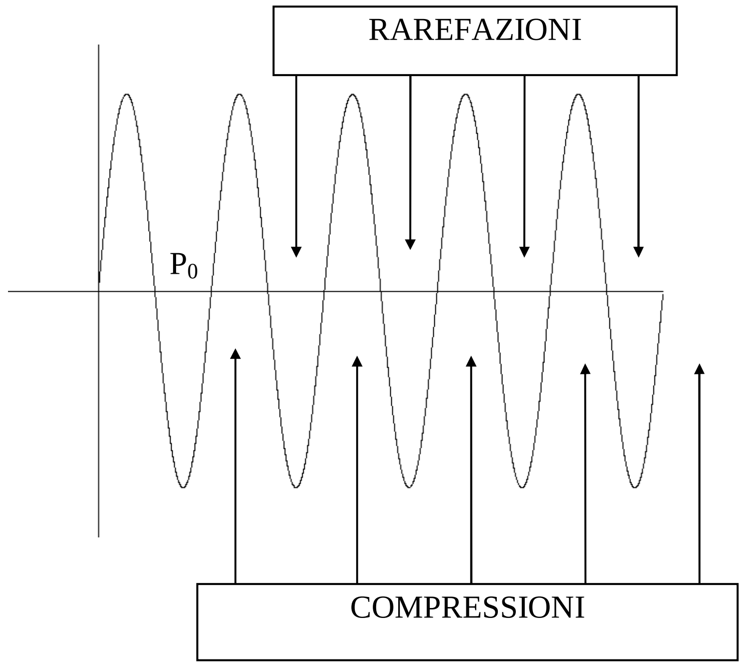
In definitiva ogni fenomeno acustico si propaga mediante onde di rarefazione e compressione dell'aria dovute a un'oscillazione di particelle (molecole).
Queste onde di compressione e rarefazione si chiamano *onde sonore*.



(fig. 7) In figura: una rappresentazione di onde sonore prodotte da una sorgente sonora puntiforme (nel centro).

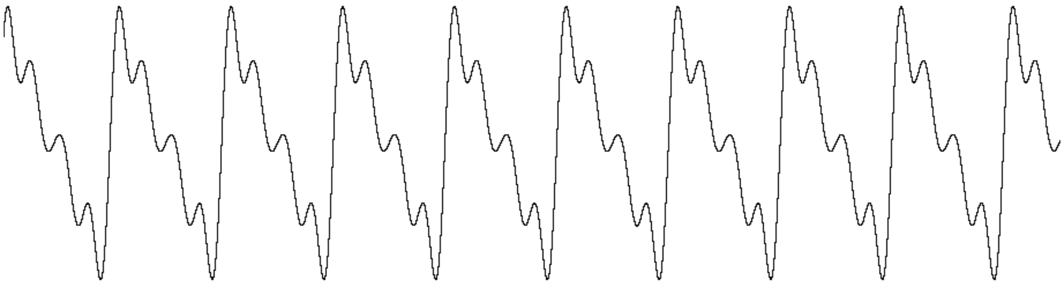
Le onde sonore si propagano nell'aria ad una velocità di circa 340 metri al secondo, si noti però che non sono le molecole a spostarsi dalla sorgente sonora fino alle nostre orecchie: le molecole si limitano a oscillare, ciò che si propaga è solo il moto oscillatorio di esse.

Solitamente le onde sonore si rappresentano nel seguente modo: consideriamo un diagramma cartesiano in cui l'asse delle ascisse rappresenta il tempo e l'asse delle ordinate rappresenta la pressione dell'aria. Fissiamo un punto in aria e sia p_0 la pressione dell'aria in questo punto in assenza di suono. Un evento sonoro, come si è già detto, crea un'alternanza di compressioni e rarefazioni dell'aria nel punto fissato. La pressione in questo punto aumenta durante le compressioni e diminuisce durante le rarefazioni. Quest'oscillazione della pressione si può rappresentare nel diagramma suddetto, si ha dunque una rappresentazione dell'onda sonora.

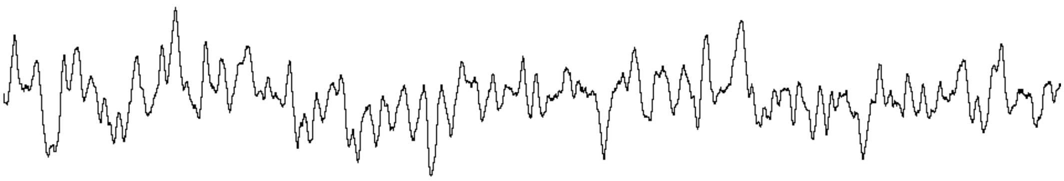


(fig. 8)

Un suono, a differenza del rumore, è caratterizzato dal fatto che l’onda sonora può considerarsi periodica, ossia si ripete allo stesso modo un numero molto elevato di volte.



(fig. 9) In figura è rappresentata l’onda di un suono. Notiamo la sua periodicità, ossia come essa si ripeta uguale ad intervalli regolari di tempo.

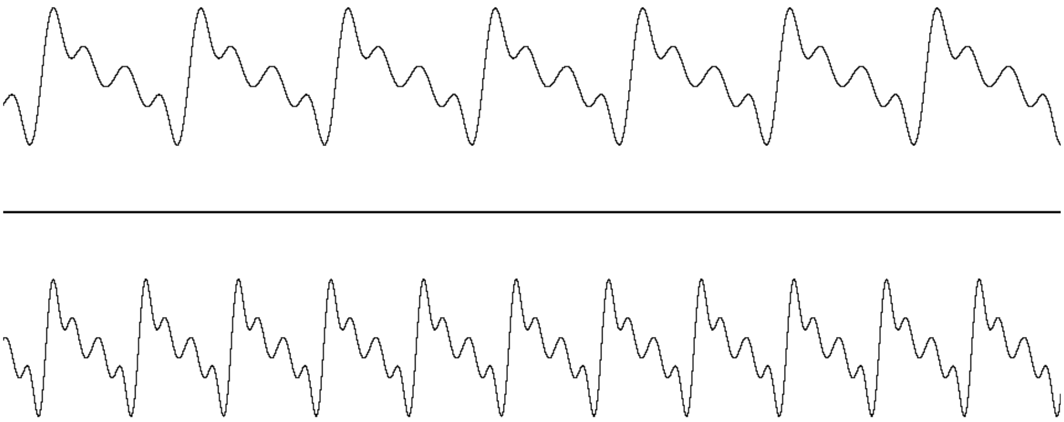


(fig. 10) In figura è rappresentata un’onda di un rumore. Si noti come essa non sia periodica.

D’ora in poi parleremo solo di suoni, ossia solo di fenomeni acustici caratterizzati da una forma d’onda periodica (in realtà nessun suono è strettamente periodico, ma su quest’argomento non è il caso di dilungarsi).

Le caratteristiche del suono: altezza intensità e timbro

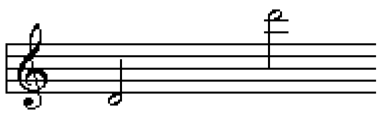
L’altezza è la caratteristica del suono che ci fa distinguere se un suono è grave o è acuto. Essa dipende dalla frequenza del suono. La *frequenza* è il numero di oscillazioni periodiche fatte in un secondo: più la frequenza è alta e più il suono è acuto.



(fig. 11) In figura sono rappresentati due suoni: il secondo è più acuto del primo perché presenta un maggior numero di oscillazioni rispetto al primo nello stesso intervallo di tempo.

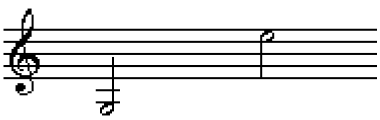
Il numero di vibrazioni al secondo che fa un corpo sonoro mentre emette un suono si esprime in Hertz. Per esempio, se una corda vibra 440 volte al secondo, emette un suono di 440 Hertz (ossia il suono del diapason, corrispondente al La centrale del pianoforte). Il nostro apparato uditivo può percepire suoni che vanno da un minimo di 16 Hertz a un massimo di 20000 Hertz.

Per quanto riguarda la voce umana, un soprano solitamente emette suoni compresi tra i 294 e i 1175 Hertz (ci riferiamo alle estensioni più frequenti dei cantanti lirici solisti, queste estensioni comunque possono variare di molto anche tra cantanti della stessa tessitura);



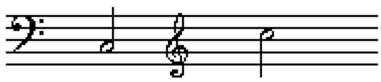
(fig. 12)

un contralto tra i 196 e i 659 Hertz;



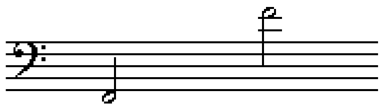
(fig. 13)

un tenore tra i 130 e i 523 Hertz;



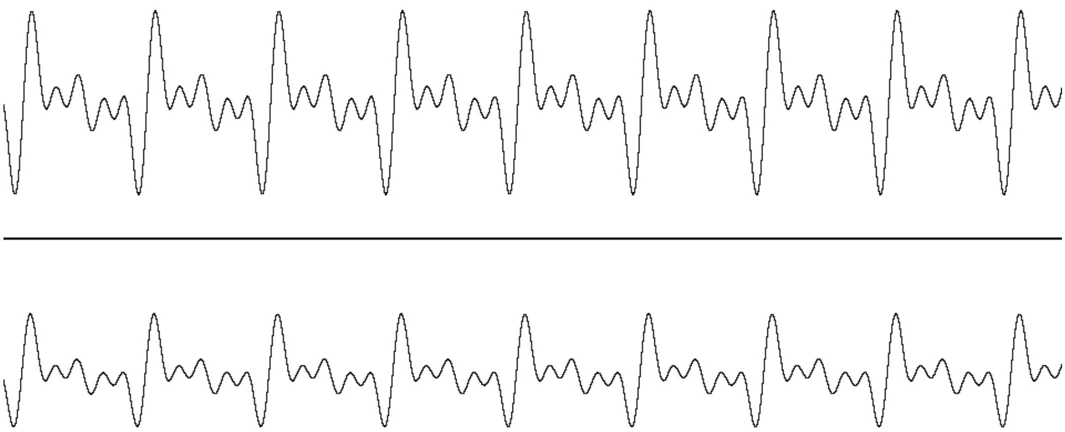
(fig. 14)

un basso tra gli 87 e i 349 Hertz.



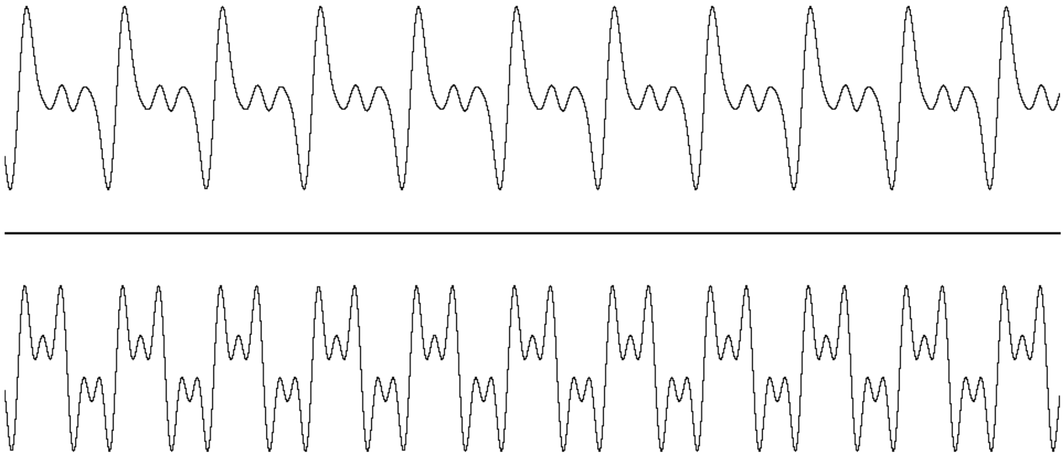
(fig. 15)

L’*intensità* è la caratteristica che ci fa distinguere un suono forte da uno debole. Essa dipende dall’ampiezza dell’onda: più l’onda è ampia e più il suono è percepito forte.



(fig. 16) In figura sono rappresentati due suoni:il primo ha un’intensità maggiore del secondo in quanto l’onda sonora ha maggiore ampiezza.

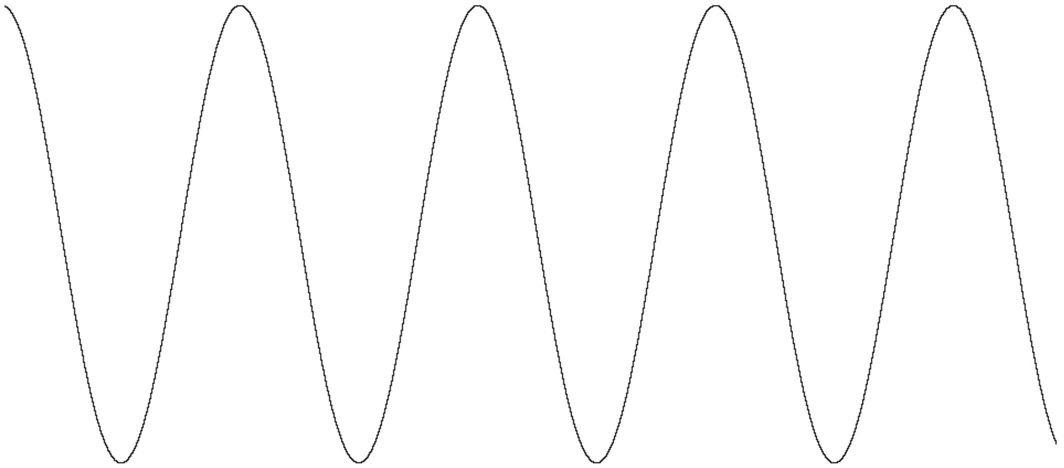
Il *timbro* è la caratteristica che ci permette di distinguere uno strumento da un altro e dipende dalla forma dell’onda sonora. Due suoni con timbri diversi danno luogo a due forme d’onda diverse.



(fig. 17) In figura sono rappresentate le onde di due suoni con la stessa frequenza ma con timbro diverso.

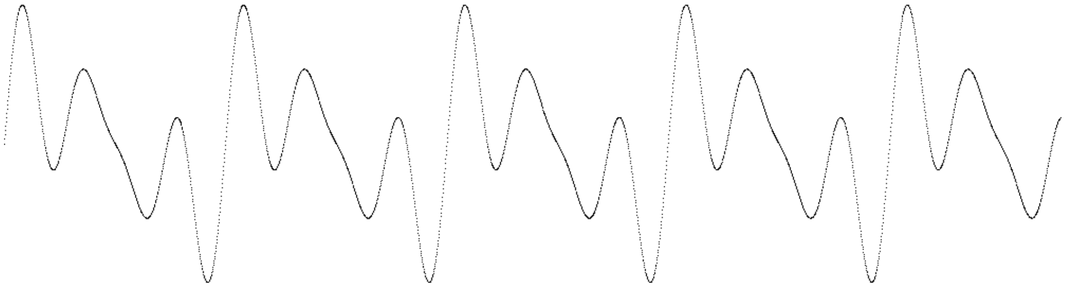
I suoni armonici

I *suoni armonici* furono scoperti nel 1701 dal francese J. Sauveur. Questi sono suoni impercettibili singolarmente, ma che, fondendosi tra di loro, formano il suono come noi lo udiamo. Ciò è dovuto alla proprietà che ha ogni corpo sonoro di vibrare oltre che in tutta la sua interezza, anche in sezioni infinite, ognuna delle quali dà un suono armonico diverso.
Il matematico Jean Baptiste Fourier (1768-1850) scoprì che una qualsiasi onda periodica (e quindi anche un'onda sonora) di frequenza f, è la sommatoria di più onde sinusoidali con frequenza f, $2f$, $3f$, ecc.
(Un'onda sinusoidale è caratterizzata dal fatto che il suo grafico è una sinusoide).



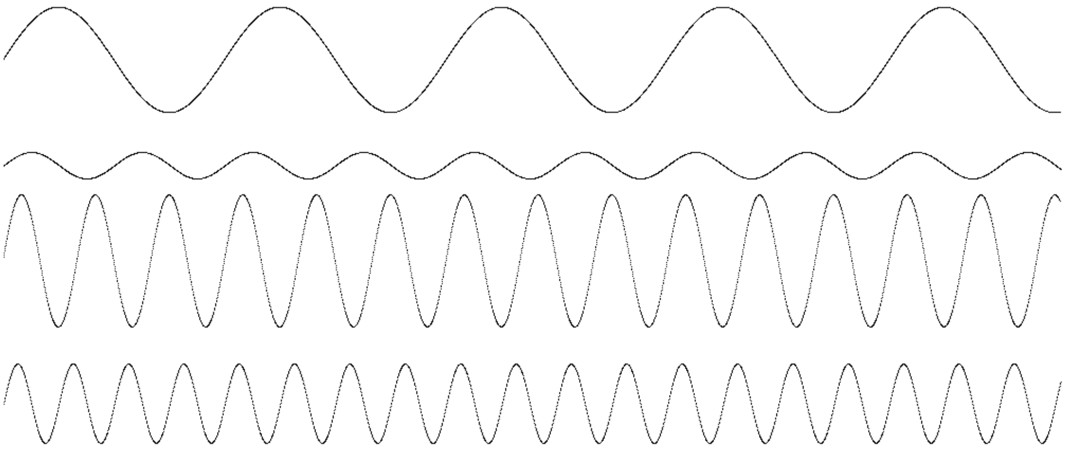
(fig. 18) In figura: un esempio di suono sinusoidale.

Quindi un qualsiasi suono è la composizione di più suoni sinusoidali che si fondono tra loro e che sono impercettibili singolarmente. Questi suoni sinusoidali, chiamati anche suoni puri, sono i suoni armonici. La forma d'onda di un suono, e quindi il suo timbro, dipende dalla presenza e dall'intensità di ciascun suono armonico presente.

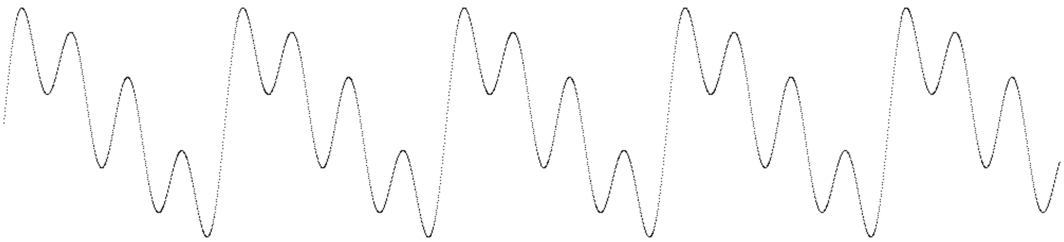


(fig. 19)

L'onda di frequenza *f* rappresentata nella figura sopra è data dalla somma delle quattro seguenti sinusoidi di frequenza rispettivamente *f*, 2*f*, 3*f* e 4*f* rappresentate in basso.

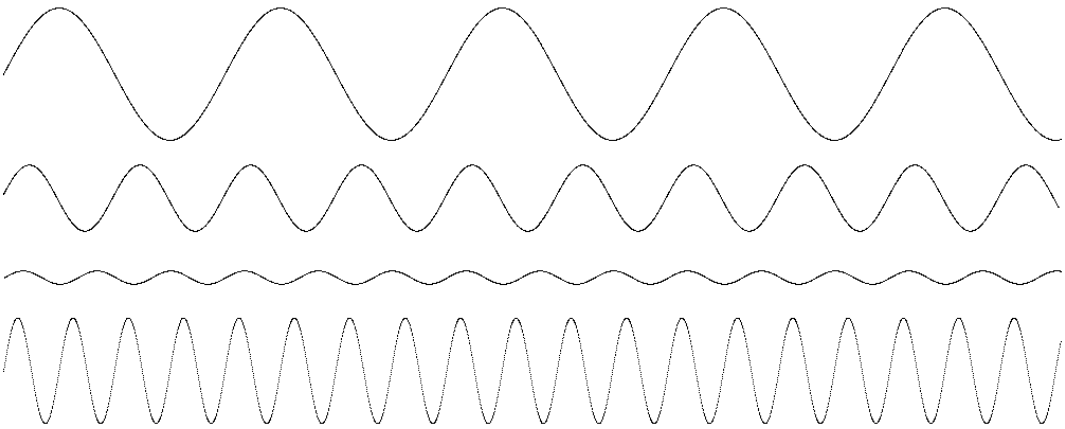


(fig. 20)



(fig. 21)

Anche l'onda di questa figura è la somma di quattro sinusoidi di frequenza rispettivamente *f*, 2*f*, 3*f* e 4*f* (vedi figure seguenti), ma è differente dall'onda precedente a causa delle diverse intensità delle sinusoidi che la compongono.



(fig. 22)

Melodia

Ascoltando una musica, spesso ciò che è più evidente è la melodia. Il termine "melodia" si può definire semplicemente come una successione di suoni che si susseguono senza sovrapporsi. Ad esempio, una persona, quando canta, emette una melodia. Le canzoni di musica leggera sono essenzialmente costituite da una melodia (ossia il canto) e da un accompagnamento strumentale.
Per brevità, lasceremo da parte l'aspetto ritmico delle melodie, anche se ha un'importanza fondamentale nella musica, e concentreremo la nostra attenzione solo sulla successione delle altezze dei suoni che compongono una melodia.
Si potrebbe pensare che due successioni diverse di suoni danno necessariamente due diverse melodie. Ebbene, questo non è vero! Consideriamo ad esempio una melodia i cui suoni che la compongono hanno le seguenti frequenze:

440	493.88	554.37	440	440	493.88	554.37	440	554.37	587.33	659.26
La	Si	Do#	La	La	Si	Do#	La	Do#	Re	Mi

Questi sono i primi undici suoni che compongono la celeberrima "Fra' Martino campanaro" corrispondenti alle sillabe <<Fra' Mar-ti-no Cam-pa-na-ro dor-mi

tu>>. Le note in parentesi sotto le frequenze sono relative all'attuale sistema musicale.
Se moltiplichiamo queste frequenze per una qualsiasi costante positiva, otteniamo ancora "Fra' Martino Campanaro" (in termini musicali quest'operazione si chiama "trasposizione"). La melodia così generata viene percepita più acuta o più grave secondo che la costante moltiplicativa sia maggiore di 1 o sia compresa tra 0 e 1.
Ciò può sembrare strano, ma se così non fosse, un uomo non potrebbe mai cantare "Fra' Martino Campanaro" così come l'abbiamo scritta, essendo essa troppo acuta per la voce maschile.
La trasposizione è un'operazione che si effettua spesso per adattare una melodia ad una voce piuttosto che ad un'altra. Ovviamente una trasposizione troppo grande può cambiare completamente il carattere della melodia. Si pensi ad esempio all'effetto comico che farebbe l'aria della regina della notte dal "Flauto magico" di Mozart se cantata da un basso (sempre che il basso riesca ad avere una voce sufficientemente agile per cantarla).

Gli intervalli

Abbiamo visto che non sono le frequenze dei suoni che ci fanno distinguere una melodia dall'altra, ma i rapporti di frequenza esistenti tra un suono e il successivo.
Il rapporto in frequenza tra un suono e il seguente si chiama *intervallo melodico*.
Più precisamente, supponiamo che in una melodia un suono abbia una frequenza uguale a f_1 e il suono immediatamente successivo abbia una frequenza pari ad f_2.
Allora, se $f_2 > f_1$ (il secondo suono è più acuto del primo), l'intervallo tra i due suoni è dato dal rapporto f_2/f_1 e l'intervallo si dice ascendente. Se invece $f_1 > f_2$ (il primo suono è più acuto del secondo), l'intervallo tra i due suoni è dato dal rapporto f_1/f_2 e l'intervallo si dice discendente.
Consideriamo nuovamente le frequenze che compongono "Fra' Martino Campanaro".

440	493.88	554.37	440	440	493.88	554.37	440	554.37	587.33	659.26

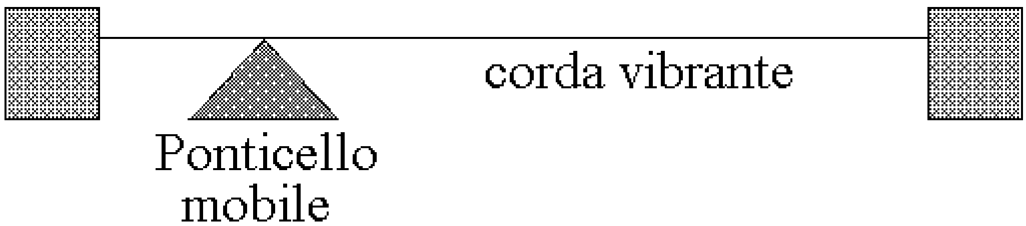
Dividiamo tutte queste frequenze per 440 (ossia trasponiamo questa melodia moltiplicando le sue frequenze per la costante 1/440). Tenendo conto che queste frequenze sono scritte con precisione limitata (a meno di 1/100), otteniamo la seguente sequenza di numeri.

1	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^2$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^4$	1	1	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^2$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^4$	1	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^4$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^5$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^7$

Perché compaiono potenze di $\sqrt[12]{2}$? In realtà la loro presenza è dovuta proprio alla natura del nostro sistema musicale, ma per chiarire questo argomento occorre fare un salto indietro di circa 2500 anni e considerare le conoscenze musicali nell’antica Grecia ai tempi di Pitagora.

La scala pitagorica

Pitagora (560-480 ca a.C.) compì molti studi sul suono mediante il monocordo. Esso è uno strumento musicale con una sola corda e un ponticello mobile che permette di modificare a piacimento la lunghezza della corda vibrante.



(fig. 23)

Supponiamo che una corda di lunghezza L emetta un suono di frequenza f, allora la corda di lunghezza L/2 emette un suono di frequenza $2f$. Un esempio di intervallo di ottava è dato da un Do e il Do immediatamente successivo sulla tastiera del pianoforte. Si chiama intervallo di ottava perché “copre” otto note: Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do.
Una corda di lunghezza L 2/3 emette un suono di frequenza f 3/2. L’intervallo costituito dal suono di frequenza f e quello di frequenza f 3/2 si chiama intervallo di quinta. Un esempio di intervallo di quinta è Do-Sol. Si chiama così perché questo intervallo “copre” cinque note: Do, Re, Mi, Fa, Sol.
Una corda di lunghezza L 3/4 emette un suono di frequenza f 4/3. L’intervallo costituito dal suono di frequenza f e quello di frequenza f 4/3 si chiama intervallo di quarta. Un esempio di intervallo di quarta è Do-Fa. Si chiama così perché questo intervallo “copre” quattro note: Do, Re, Mi, Fa.

Da qui si deduce facilmente che un suono alla quinta inferiore rispetto a quello di frequenza *f* ha frequenza pari a *f* 2/3 e un suono alla quarta inferiore ha frequenza *f* 3/4.
Da ciò si può ricavare una scala di sette suoni: la scala pitagorica. Poiché non hanno importanza le frequenze dei suoni, ma i rapporti di frequenza tra un suono e l'altro, poniamo uguale ad *f* la frequenza del primo grado della scala (Do).
Cerchiamo dunque le frequenze di ogni grado della scala.

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
f							2*f*

Il Fa (che sta una quarta sopra il Do) ha frequenza *f* 4/3.
Il Sol (che sta una quinta sopra il Do) ha frequenza *f* 3/2.
Abbiamo quindi:

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
f			*f* 4/3	*f* 3/2			2*f*

Il Re sta una quarta sotto il Sol. Quindi dobbiamo moltiplicare la frequenza del Sol per 3/4. Quindi la frequenza del Re è $f\ \frac{3}{2}\frac{3}{4} = \frac{9}{8}f$. Abbiamo quindi:

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
f	*f* 9/8		*f* 4/3	*f* 3/2			2*f*

Il La si trova una quinta sopra il Re. Dobbiamo perciò moltiplicare la frequenza del Re per 3/2.
Si ha perciò $\frac{3}{2}\frac{9}{8}f. = \frac{27}{16}f$. Abbiamo quindi:

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
f	*f* 9/8		*f* 4/3	*f* 3/2	*f* 27/16		2*f*

Il Mi si trova una quarta sotto il La. Occorre perciò moltiplicare la frequenza del La per 3/4. Si ottiene $f\ \frac{27}{16}\frac{3}{4} = \frac{81}{64}f$. Abbiamo quindi

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
f	*f* 9/8	*f* 81/64	*f* 4/3	*f* 3/2	*f* 27/16		2*f*

Il Si si trova una quinta sopra il Mi. Occorre moltiplicare la frequenza del Mi per 3/2 e si ottiene

$f\,\frac{81}{64}\,\frac{3}{2}=\frac{243}{128}\,f$. Abbiamo così trovato le frequenze dei gradi della scala pitagorica:

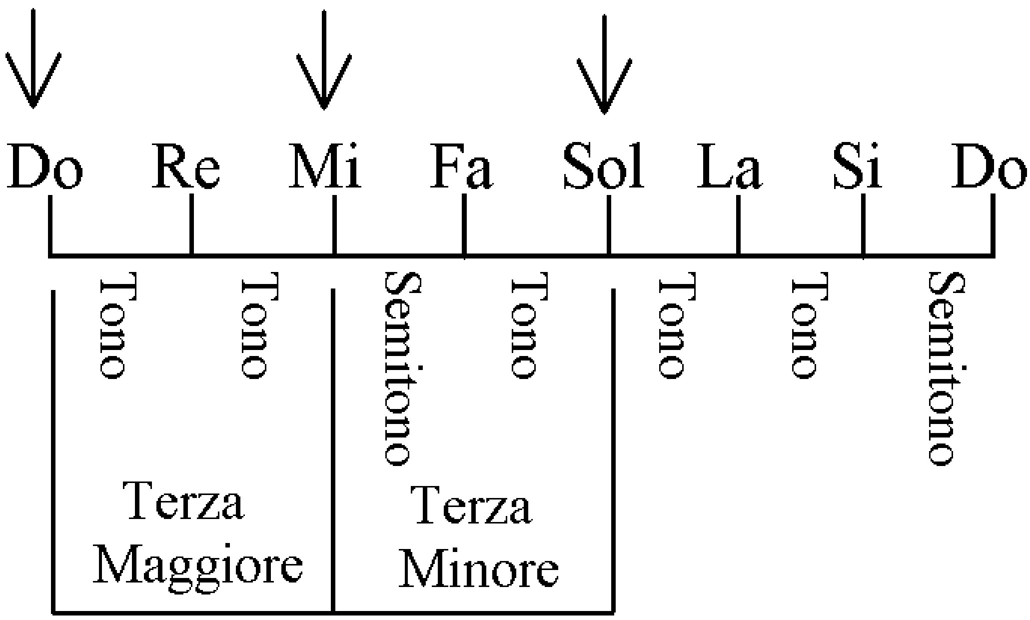
Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
f	f 9/8	f 81/64	f 4/3	f 3/2	f 27/16	f 243/128	$2f$

Notiamo che due note consecutive possono formare due tipi di intervalli: uno più ampio (intervallo di tono) uguale a 9/8 o un intervallo meno ampio (intervallo di semitono) uguale a 256/243. Formano un intervallo di tono le note Do-Re, Fa-Sol, Sol-La, La-Si. Formano un intervallo di semitono le note Mi-Fa e Si-Do.

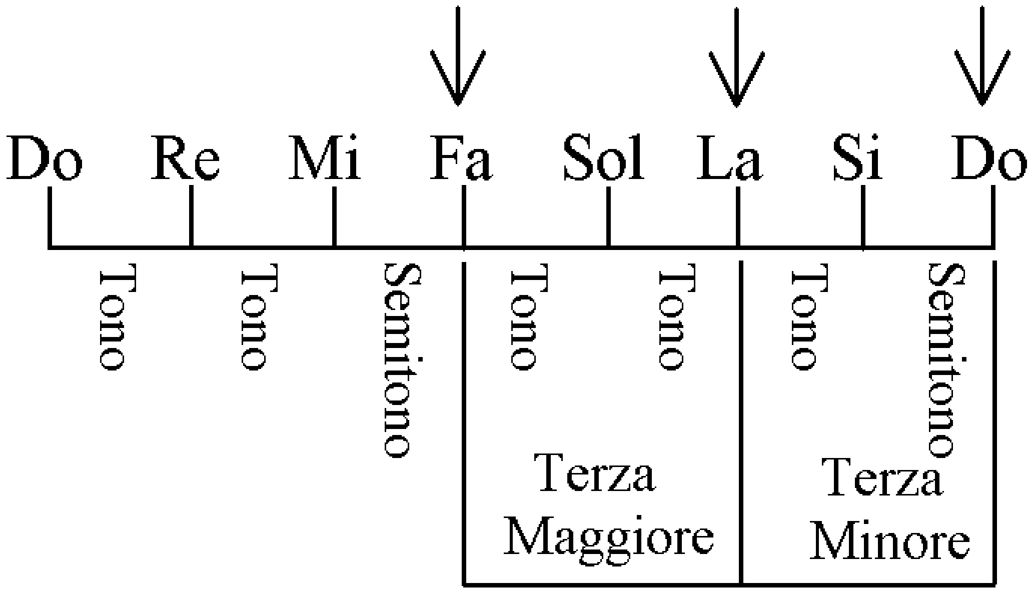
La scala Zarliniana

La scala pitagorica è stata usata e non ha dato problemi fino a quando non c'è stato l'avvento della polifonia. Le prime composizioni polifoniche, ossia composizioni in cui si suonano o si cantano più note diverse contemporaneamente, erano caratterizzate dal fatto che venivano emessi simultaneamente solo suoni che tra loro formavano un intervallo di quarta, di quinta o di ottava (in questo caso si parla di *intervallo armonico* e si calcola sempre dal più grave all'acuto: poiché i due suoni sono emessi simultaneamente, non ha senso parlare di intervallo armonico ascendente o discendente). A quei tempi, infatti, (a partire dal sec. IX fino al XIII) gli intervalli armonici di ottava, di quinta e di quarta venivano considerati consonanti, mentre gli altri dissonanti. Col passar del tempo però, alle rinnovate esigenze espressive della musica non bastarono solo le consonanze di ottava di quinta e di quarta. Si cominciarono quindi ad usare anche gli intervalli di terza e di sesta che, essendo dissonanti per la scala pitagorica, venivano istintivamente un po' modificati dai cantori dell'epoca, ciò però non era possibile con gli strumenti a tastiera.
La scala pitagorica perciò non era adatta per la musica polifonica e fu gradualmente sostituita nel XVI secolo dalla scala zarliniana, resa popolare nel 1558 da Gioseffo Zarlino. In questa scala si ridefinirono gli intervalli Do-Mi (terza maggiore) e Do-La (sesta maggiore) in modo che non fossero più dissonanti.
La scala zarliniana trova origine dalla definizione di accordo perfetto maggiore data da Zarlino, costituito da una terza maggiore (intervallo costituito dalla sovrapposizione di due toni consecutivi) e da una terza minore (intervallo

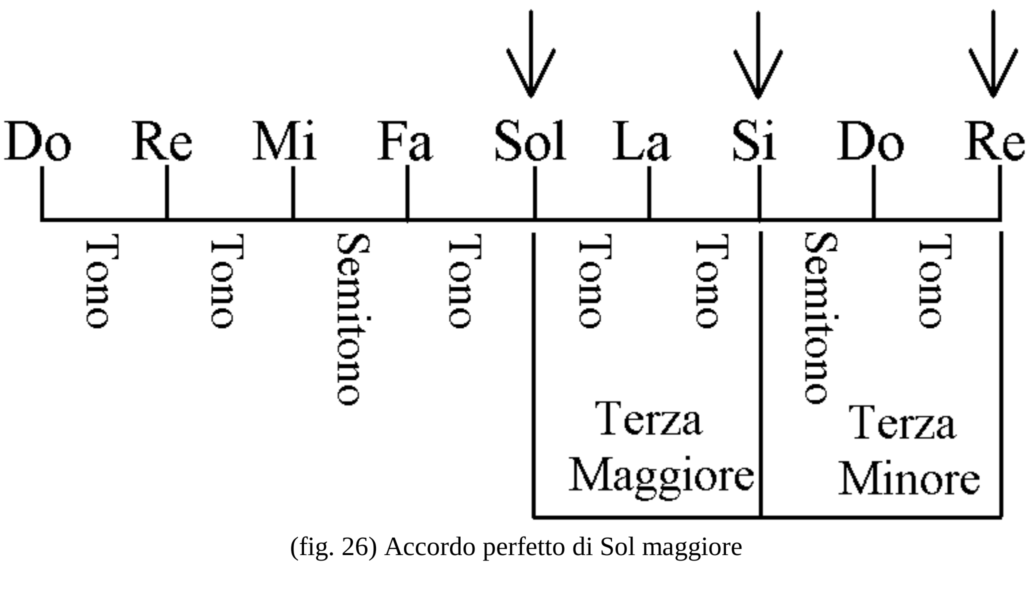
costituito dalla sovrapposizione di un tono e di un semitono). Nella scala si trovano tre accordi maggiori: Do-Mi-Sol, Fa-La-Do e SolSiRe. Infatti i tre intervalli Do-Mi, Fa-La e Sol-Si formano una terza maggiore, mentre gli intervalli Mi-Sol, La-Do e Si-Re formano una terza minore.



(fig. 24) Accordo perfetto di Do Maggiore



(fig. 25) Accordo perfetto di Fa Maggiore



(fig. 26) Accordo perfetto di Sol maggiore

Secondo la definizione di accordo perfetto maggiore, due suoni che formano una terza maggiore devono avere un rapporto di frequenza pari a 5/4. Costruiamo quindi la scala zarliniana ponendo ad *f* la frequenza del primo Do.

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
f							$2f$

I rapporto frequenziale tra due note ad intervallo di quarta (Do-Fa) e di quinta (Do-Sol) continuano ad essere rispettivamente 4/3 e 3/2 (come nella scala pitagorica), mentre ora quello di terza maggiore (Do-Mi) è di 5/4.

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do	Re
f		$f\,5/4$	$f\,4/3$	$f\,3/2$			$2\,f$	

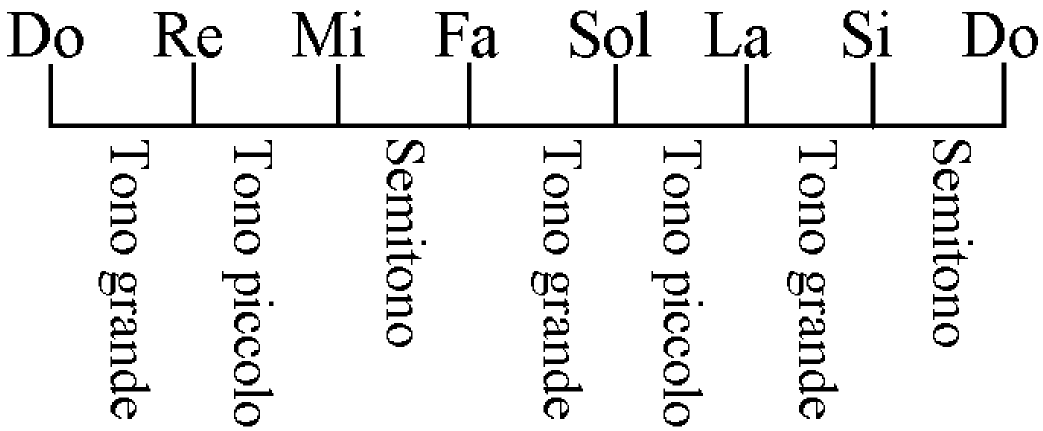
Notiamo che le note Do, Mi e Sol hanno frequenze che stanno tra loro come 4:5:6, infatti, mettendo sotto un unico denominatore i tre numeri 1, 5/4 e 3/2 abbiamo 4/4, 5/4 e 6/4.
Anche le note Fa, La e Do (seconda ottava) devono formare un accordo maggiore, quindi le frequenze di Fa-La-Do devono stare in rapporto di 4, 5 e 6. Quindi, poiché la frequenza di Fa è $\frac{4}{3}f$, la frequenza di La deve essere $\frac{5}{3}f$ e la frequenza di Do (ottava superiore) è ovviamente $2=\frac{6}{3}f$. Otteniamo così:

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do	Re
f		$f\,5/4$	$f\,4/3$	$f\,3/2$	$f\,5/3$		$2\,f$	

Anche Sol, Si e Re (ottava superiore) devono costituire un accordo maggiore, quindi le frequenze delle tre note devono stare in rapporto di 4, 5 e 6.
Moltiplichiamo per comodità la frequenza di Sol per 4/4. Allora questa è $f\frac{3}{2}\frac{4}{4}=\frac{12}{8}f$. La frequenza di Si è $f\frac{3}{2}\frac{5}{4}=\frac{15}{8}f$ e la frequenza di Re (ottava superiore) è $f\frac{3}{2}\frac{6}{4}=\frac{18}{8}f=\frac{9}{4}f$. Di conseguenza la frequenza del Re all'ottava inferiore è $f\frac{1}{2}\frac{9}{4}=\frac{9}{8}f$. Otteniamo quindi la scala zarliniana.

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
f	$f\,9/8$	$f\,5/4$	$f\,4/3$	$f\,3/2$	$f\,5/3$	$f\,15/8$	$2\,f$

Rispetto alla scala pitagorica le frequenze variate sono quelle rispetto a Mi, La e Si.
Si noti che i rapporti relativi agli intervalli tra due note consecutive non sono più regolari come nella scala pitagorica. Infatti, mentre nella scala pitagorica due note consecutive costituiscono o un intervallo di semitono 256/243 o di tono 9/8, nella scala zarliniana esiste un intervallo di semitono 16/15 e due tipi di intervalli di tono: tono grande 9/8 e tono piccolo 10/9.
L'intervallo di semitono sta tra le note Mi-Fa e Si-Do, l'intervallo di tono grande sta tra Do-Re, Fa-Sol e La-Si e quello di tono piccolo si trova tra Re-Mi e Sol-La.



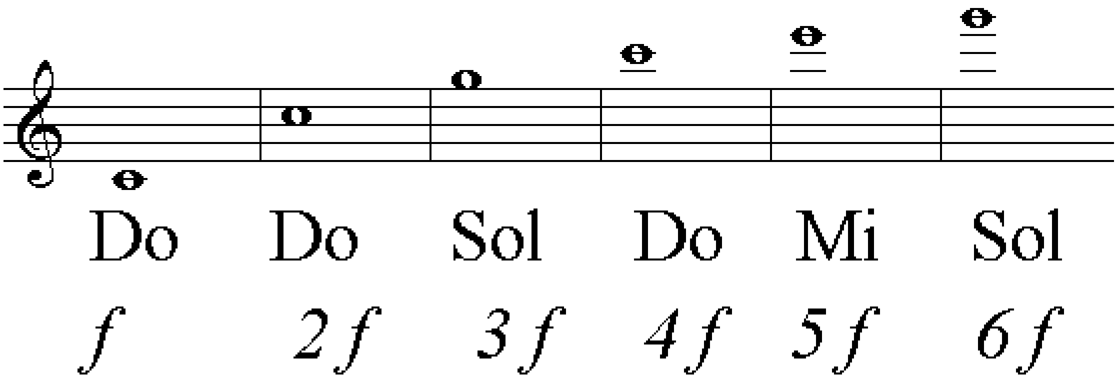
(fig. 27)

Giustificazione fisica della scala zarliniana

La scala zarliniana trova una sua giustificazione fisica nei suoni armonici, benché questi siano stati scoperti molto dopo. Zarlino, infatti, definì l'accordo perfetto maggiore dai sei suoni che si ottengono frazionando la corda a 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 e 1/6 della sua lunghezza. Supponiamo che la corda in tutta la sua lunghezza emetta la nota Do di frequenza *f*,

(fig. 28)

allora, frazionando la corda a 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 e 1/6, si ottengono i seguenti suoni, rispettivamente di frequenza 2 *f*, 3 *f*, 4 *f*, 5 *f*, 6 *f*.

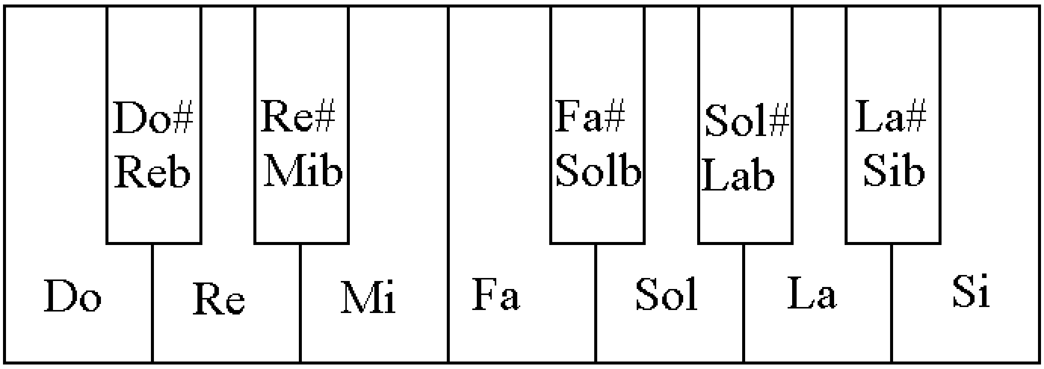


(fig. 29)

Osserviamo che i suoni 4°, 5° e 6° corrispondenti rispettivamente alle note Do Mi Sol formano l'accordo perfetto maggiore ed hanno frequenze che stanno tra loro come 4:5:6. Da qui dunque nasce la definizione, data da Zarlino, di accordo perfetto maggiore.
Si deve notare che la successione di suoni che si è ricavata frazionando la corda coincide con la successione degli armonici del suono della corda. Infatti, come si è già detto, un qualsiasi suono di frequenza *f* è la sommatoria di suoni armonici di frequenza *f*, 2 *f*, 3 *f*, 4 *f*, 5 *f*, 6 *f*,...
Quindi, ogni suono "contiene" l'accordo perfetto maggiore ed è dato dal 4°, dal 5° e dal 6° suono armonico. La scala zarliniana perciò ha una sua "giustificazione" fisica perché si basa su intervalli che si producono spontaneamente in natura nella serie degli armonici di ogni suono.

Le tonalità

La scala zarliniana si dimostrò più adeguata alla musica polifonica rispetto alla scala pitagorica, ma nessuna delle due poterono far fronte a un'altra esigenza della musica: la modulazione, ossia il passaggio da una tonalità all'altra.
Oggi con il corrente sistema musicale (il sistema temperato equabile di cui parleremo più avanti) è possibile eseguire qualsiasi melodia partendo da una qualsiasi delle dodici note comprese in un'ottava.

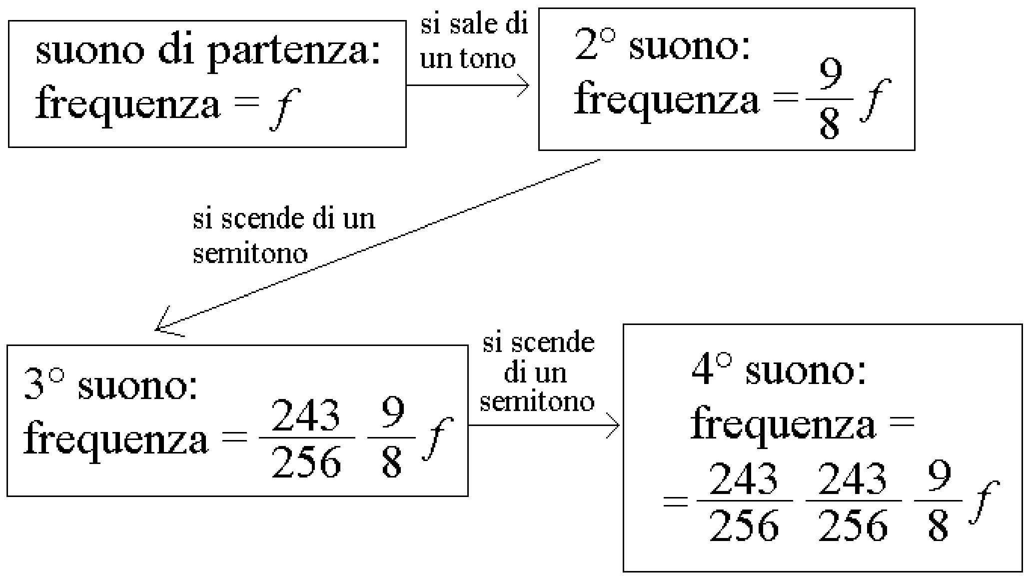


(fig. 30)

È possibile quindi trasporre una melodia facendola iniziare con una nota che non sia quella con cui la melodia effettivamente inizia. Un'operazione di questo tipo viene detta, in termini musicali, *trasposizione in un'altra tonalità*.
Passare da una tonalità all'altra, anche all'interno di un unico brano musicale (in questo caso si parla di *modulazione*) è un'operazione musicalmente molto utile. Fare questa cosa, però, è molto difficile (se non impossibile) con la scala pitagorica e con quella zarliniana. Illustriamo il perché cominciando dalla scala pitagorica.
Supponiamo di voler trasporre in una tonalità diversa una melodia con un semitono discendente (per esempio Do-Si). Allora, partendo da ogni nota della scala deve essere possibile fare un semitono dicendente. È chiaro che le sette note della scala non bastano più ed è necessario considerare delle note aggiuntive, che in musica sono dette *note alterate*. In particolare, supponendo che il Do abbia frequenza *f*, se vogliamo un intervallo di semitono discendente partendo ad esempio dal Re, abbiamo bisogno di una nota con frequenza pari a $\frac{243}{256}\frac{9}{8}f = \frac{2187}{2048}f \approx 1.06787f$, ossia il Do#.

Supponiamo ora di voler trasporre nelle diverse tonalità una musica che contiene un semitono ascendente (ad esempio Si-Do). Se dunque vogliamo un semitono ascendente partendo dal Do, abbiamo bisogno di un'altra nota alterata che si ottiene moltiplicando la frequenza *f* del Do per 256/243. Otteniamo così il Reb con frequenza pari a $\frac{256}{243}f \approx 1.0535f$ differente dalla frequenza del Do#. Ciò significa che nella scala pitagorica un tono non è l'unione di due semitoni (come invece accade nell'attuale sistema musicale).

Consideriamo quindi una melodia che, partendo da una qualsiasi nota, salga di un tono e scenda di due semitoni. Ebbene, il suono della nota di partenza è differente da quello della nota finale. Infatti, se il suono iniziale ha frequenza *f*, si ha che:



$$\frac{243}{256}\frac{243}{256}\frac{9}{8}f = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288} \neq 1$$

(fig. 31)

Questo rapporto è detto *comma pitagorico*. Esso si può ottenere anche salendo di 12 quinte e scendendo di 7 ottave, infatti:

$$\underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}_{\text{si sale di 12 quinte}}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{7}}_{\text{si scende di 7 ottave}} = \frac{3^{12}}{2^{19}}$$

Questo significa che, se si sale di 12 quinte e si scende di 7 ottave, non si ritorna al suono di partenza, come invece accade con l'attuale sistema musicale, ma si arriva ad un suono che differisce da quello di partenza per il comma pitagorico.
Abbiamo visto, in pratica, come una successione di intervalli può portarci a suoni non appartenenti a questo sistema musicale. In altre parole, si ha che alcune successioni di intervalli sarebbero impossibili sul sistema pitagorico, in quanto ci porterebbero a note inesistenti. Ciò è dovuto al fatto che i rapporti di frequenza tra le note sono numeri razionali. Per non uscire dalle note del sistema musicale, occorrerebbe invece che l'intervallo più piccolo esistente tra due note (nel nostro sistema il semitono) fosse un sottomultiplo dell'ottava e di tutti gli altri intervalli esistenti. Sarebbe quindi necessario definire il semitono con un numero che, elevato a una certa potenza n, fosse uguale a 2 (nel nostro attuale sistema n = 12 perché l'ottava è costituita da 12 semitoni). Ciò è possibile solo usando la radice n-ma di 2 che, come è noto a tutti, è un numero irrazionale. Questo discorso comunque lo riprenderemo più avanti parlando del sistema temperato equabile.
Tutto ciò che si è appena detto per la scala pitagorica vale anche per la scala zarliniana. A complicare le cose, in quest'ultima scala, è il fatto che ci sono due tipi di tono, mentre il semitono non corrisponde alla metà di nessuno dei due toni.
La grande scomodità di entrambe le scale consiste proprio nel fatto che un tono non è uguale a due semitoni e quindi le tastiere dell'epoca, per poter consentire la modulazione da una tonalità all'altra, dovevano avere molti più tasti per ottava rispetto a quelle odierne, dato che occorreva fare una distinzione tra il Reb e il Do#, tra il Mib e il Re#, ecc. In altre parole, per ogni tasto nero della tastiera, ce ne sarebbero dovuti stare (almeno) due: uno relativo al diesis e uno al bemolle e ciò avrebbe comportato grandi difficoltà d'esecuzione per tutti gli strumenti a tastiera. Per questa ragione né la scala pitagorica né la scala zarliniana potevano essere adatte alle esigenze della musica che si andava evolvendo. La soluzione a

questo problema fu trovata alla fine del '600 con l'introduzione del sistema temperato equabile, ossia il nostro attuale sistema musicale.

Il sistema temperato equabile

Il sistema temperato equabile è stato ideato da Andreas Werckmeister e perfezionato da George Neidhart a cavallo tra il XVII e il XVIII secolo. Esso divide l'ottava in 12 semitoni equidistanti, quindi il rapporto tra la frequenza di due suoni che formano un intervallo di semitono è uguale a $\sqrt[12]{2}$. Supponiamo che il Do abbia frequenza *f*, allora le frequenze dei dodici suoni dell'ottava saranno:

Do	Do# = Reb	Re	Re# = Mib	Mi	Fa	Fa# = Solb	Sol	Sol# = Lab	La	La# = Sib	Si	Do
f	$\sqrt[12]{2}\,f$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^2 f$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^3 f$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^4 f$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^5 f$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^6 f$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^7 f$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^8 f$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^9 f$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{10} f$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{11} f$	$2f$

Notiamo che tutti i rapporti di frequenza tra gli intervalli sono cambiati, escluso l'intervallo di ottava che conserva il rapporto di frequenza 2:1. In particolare, il rapporto di frequenza tra due suoni che formano un intervallo di terza maggiore è uguale a $\left(\sqrt[12]{2}\right)^4 \neq \frac{5}{4}$, quello dato da un intervallo di quarta è uguale $\left(\sqrt[12]{2}\right)^5 \neq \frac{4}{3}$ e quello dato da un intervallo di quinta è $\left(\sqrt[12]{2}\right)^7 \neq \frac{3}{2}$.

Quindi i rapporti frequenziali degli intervalli della scala del sistema temperato non sono più quelli << naturali >> avvalorati dall'esistenza dei suoni armonici, ma sono leggermente modificati per difetto o per eccesso. Il termine "temperato" è dovuto appunto al fatto che gli intervalli non sono più quelli naturali, ma sono temperati (ossia modificati e aggiustati) per evitare gli inconvenienti delle precedenti scale. In particolare, l'intervallo di tono, il cui rapporto di frequenza è $\left(\sqrt[12]{2}\right)^2$, è esattamente il doppio del semitono. Quindi non occorrono due suoni distinti per le note alterate (ossia uno per il diesis e uno per il bemolle). In questo modo la tastiera contiene solo 12 suoni per ogni ottava e qualsiasi successione di intervalli non ci porta a note estranee a quelle del nostro sistema. Con questo sistema musicale tutte le modulazioni sono possibili e perciò per suonare una melodia si può cominciare da una nota qualsiasi. In altre parole ogni melodia può essere suonata in dodici tonalità differenti, cioè una per ogni suono dell'ottava. È

possibile così anche comporre in ogni tonalità con uguale semplicità, cosa che non è possibile con la scala zarliniana. In essa infatti c'è il grave inconveniente che lo stesso intervallo cambia a seconda della tonalità. Ad esempio, nella tonalità di Do, le note Re e Mi (che costituiscono il 2° e il 3° grado della scala) formano un intervallo di tono piccolo 10/9, mentre, nella tonalità di Re, queste due note (che costituiscono il 1° e il 2° grado della scala) formano un intervallo di tono grande 9/8. In questo caso, se uno strumento a tastiera è accordato nella tonalità di Do, non può suonare in Re senza prima modificare l'accordatura.
A dimostrazione della validità del sistema temperato, J.S. Bach ha composto "Il clavicembalo ben temperato": una raccolta di 48 preludi e fughe, scritte in tutte le tonalità. Esso è un capolavoro della musica che non sarebbe mai potuto essere scritto senza la semplice ma geniale idea di porre l'intervallo di semitono pari a $\sqrt[12]{2}$. È facile rendersi conto che senza il sistema temperato, tutti i capolavori della musica composti dal '700 in poi non sarebbero mai nati; la loro esistenza è stata permessa da una semplice intuizione matematica. È quindi questa una dimostrazione di come la matematica e la musica non siano due discipline in antitesi, ma che c'è sempre stato uno stretto connubio tra loro: un connubio che per un certo periodo, specialmente durante il romanticismo, è stato dimenticato, ma che sta tornando a evidenziarsi grazie alla musica algoritmica ed elettronica.