

Interpretazione geometrica del comma pitagorico

Stefano Busiello

Scuola superiore statale IPCT "Axel Munthe" di Anacapri
Conservatorio "S. Pietro a Majella" di Napoli

Il sistema temperato, così come il sistema pitagorico e gli altri sistemi, può essere visto come una torre ad elica circolare. La proiezione ortogonale di questa torre sul suolo è come un orologio in cui alla posizione 0 (le 12) di piano terra ci sta il DO. Contrariamente a come si è soliti fare in matematica, imponiamo che si sale girando in senso orario (in questo modo, come vedremo, possiamo meglio immaginare la proiezione ortogonale della torre come un orologio). Una salita ad elica circolare intorno alla torre porta ai diversi piani della torre. Ogni piano sta a distanza angolare dal precedente pari a 7 ore di differenza (ricordiamo infatti che una quinta è costituita da 7 semitoni). A piano terra sta il DO, al primo piano ad ore 7 sta il SOL, al secondo piano 7 ore più avanti (quindi ad ore 2) sta il RE, al terzo piano ad ore 9 sta il LA e così via, seguendo la seguente successione per quinte:

DO → SOL → RE → LA → MI → SI → FA# → DO# → SOL# → RE# → LA# → MI# → SI#.

Potremmo continuare all'infinito, usando i doppi, tripli, quadrupli, ..., n-mi diesis, continuando con FA doppio diesis, DO doppio diesis, SOL doppio diesis, ecc.

Si noti che SI# (dodicesimo piano) sta alla posizione 0 (mezzogiorno) come il DO ed in generale l'n-mo piano si trova in posizione $n \bmod 12$.

Tutti i piani sopra il DO appartengono al "regno dei diesis", ma in questa torre ci stanno anche i piani sotterranei, scendendo sotto il DO procedendo in senso antiorario e si entra nel "regno dei bemolli". Perciò 7 ore indietro, ossia ad ore cinque, ci troviamo al piano -1 corrispondente al FA, Ancora sette ore indietro (ad ore 10) siamo al piano -2 corrispondente al SIb. Procediamo quindi in questo modo secondo l'ordine delle quinte discendenti:

DO → FA → SIb → MIb → LAb → REb → SOLb → DOb → FAb → SIbb → MIbb → LAbb → REbb.

Anche in questo caso possiamo continuare all'infinito con i bemolli multipli.

Si noti che il REbb (piano -12) sta alla posizione 0 come il DO.

Parliamo ora dell'altezza della torre: essa viene misurata in ottave. Imponiamo che salendo per la salita elicoidale, ogni volta che si fa un giro completo si sale di un'ottava (quindi per andare al piano superiore si sale di 7/12 di ottava).

Da quanto si è detto, è chiaro che, da qualunque piano partiamo, (positivo o negativo), se saliamo (o scendiamo) di 12 piani, allora saliamo (o scendiamo) esattamente di 7 ottave ed è chiaro che affinché 2 suoni distino un numero intero di ottave, devono essere posti nella stessa posizione angolare (cioè alla stessa ora) e ciò significa che disteranno 7 ottave o un multiplo intero di 7 ottave. A questo punto possiamo definire **omologhi** tutti i suoni nella stessa posizione angolare e possiamo racchiudere tutti i suoni in 12 classi di equivalenza, in ognuna delle quali ci sono tutti i suoni omologhi tra loro. Così, ad esempio, nella prima classe di equivalenza ci stanno DO, SI#, REbb, LA### ecc.

Diamo ora un'interpretazione geometrica della scala pitagorica.

Costruiamo come prima una torre ad elica circolare in cui il piano terra sia posizionato con il DO ad ore 0. Ancora, imponiamo, come in precedenza, che facendo un giro completo in senso orario ci si trova un'ottava sopra. Imponiamo infine che, a differenza di prima, due piani consecutivi non abbiano una distanza angolare di 7 ore, ma di 7 ore 1 minuto e 10.380031...secondi (più avanti spiegheremo come si ricava questo numero). È importante precisare che la distanza angolare tra due piani consecutivi è un numero irrazionale e che quindi non capiteranno mai due piani che distano un numero intero di ottave. In particolare, due note a 12 piani di differenza (ad esempio il DO e il SI#) non stanno precisamente alla stessa posizione angolare, ma la nota posta più in alto (il SI#) sta 14 minuti e 4.56057... secondi avanti e di conseguenza non precisamente 7 ottave sopra, ma 7 ottave e

23.46... centesimi di semitono sopra (più avanti spiegheremo come si calcolano questi numeri). Chiamiamo dunque **comma pitagorico** questa discrepanza di 23.46... centesimi di semitono. Ribadiamo che la distanza angolare tra due piani consecutivi è un numero irrazionale, quindi, benché la torre sia infinita sia verso l'alto (mondo dei diesis) che verso il basso (mondo dei bemolli), non possono mai capitare due suoni omologhi; di contro, l'insieme delle proiezioni ortogonali è denso in tutte le posizioni angolari. In altre parole, l'ottava viene divisa in infiniti microintervalli infinitesimi, formati dalle note con le alterazioni multiple.

NOTA 1 Spieghiamo come si calcola la differenza angolare tra due piani consecutivi che formano la "torre" del sistema pitagorico.

Premettiamo che due suoni a distanza di un'ottava formano un rapporto di frequenza uguale a 2;

due suoni a distanza di 2 ottave formano un rapporto di frequenza uguale a 2^2 ;

due suoni a distanza di 3 ottave formano un rapporto di frequenza uguale a 2^3 ;

...

due suoni a distanza di x ottave formano un rapporto di frequenza uguale a 2^x .

Sappiamo che due note a distanza di quinta nel sistema pitagorico formano un rapporto di frequenza pari a $3/2$.

A questo punto, per calcolare a cosa corrisponde il rapporto $3/2$ espresso in ottave, occorre risolvere la seguente equazione esponenziale:

$$2^x = 3/2$$

Troviamo che $x = \log(3/2)/\log(2) = 0.584962500721\dots$, quindi due piani consecutivi stanno ad una distanza di $0.584962500721\dots$ giri completi di orologio. Per trasformare in ore questa distanza espressa in giri completi di orologio, basta moltiplicarla per 12 e otteniamo

$7.019550008653874177\dots$ dove il "7" indica le ore, mentre la parte decimale

$0.019550008653874177\dots$ deve essere trasformata in minuti moltiplicandola per 60; otteniamo così $1.17300051923245\dots$ dove "1" significa 1 minuto e la parte decimale $0.17300051923245\dots$ deve essere trasformata in secondi moltiplicandola per 60; otteniamo così $10.3800311539470388\dots$ secondi.

NOTA 2

Calcoliamo la differenza in ottave tra 2 note a 12 piani di differenza.

Abbiamo visto nella NOTA 1 che due suoni a 1 piano di differenza distano $0.584962500721\dots$

ottave, quindi 2 suoni a 12 piani di differenza distano $7.019550008653874177\dots$ ottave, ossia 7

ottave più la parte decimale $0.019550008653874177\dots$ (ossia il comma pitagorico) che per

misurarla in semitoni dobbiamo moltiplicarla per 12 e otteniamo $0.2346001038464901293\dots$ e che

per misurarla in centesimi di semitono dobbiamo moltiplicarla per 100 ottenendo

$23.460010384649012933840792848558\dots$

Quindi il comma pitagorico equivale a circa 23.46 centesimi di semitono.