

Il comma pitagorico

Stefano Busiello

Scuola superiore statale IPCT "Axel Munthe" di Anacapri
Conservatorio "S. Pietro a Majella" di Napoli

Premessa: il comma pitagorico è il rapporto di frequenza (maggiore di 1) tra due suoni che nel nostro moderno sistema chiamiamo omologhi e che siano trasportati alla stessa ottava. Ovviamente non dobbiamo considerare più la scala diatonica (ossia la scala fatta solo di tasti bianchi), ma dobbiamo allargare la scala introducendo anche le note alterate, indispensabili a modularla da una tonalità ad un'altra.

Consideriamo quindi due suoni omologhi, ad esempio DO# e REb (alla stessa ottava) aventi come frequenza rispettivamente $f_{DO\#}$ e f_{REb} . Allora:

$$\text{comma pitagorico} = f_{DO\#} / f_{REb}$$

Calcoliamo questo rapporto:

Calcoliamo la frequenza del DO#: partendo dal DO dobbiamo salire di 7 quinte:

DO → SOL → RE → LA → MI → SI → FA# → DO#

Quindi, se poniamo la frequenza del DO uguale ad f , allora la frequenza del DO# è data da $(3/2)^7 f$. Contemporaneamente, per poterci mantenere nell'ambito di una sola ottava, dobbiamo scendere di 4 ottave, perché se saliamo di 7 quinte ci troviamo 4 ottave sopra. Quindi, in definitiva, la frequenza del DO# è $(3/2)^7 (1/2)^4 f$.

Calcoliamo ora la frequenza del REb: partendo dal DO dobbiamo scendere di 5 quinte:

DO → FA → SIb → Mib → LAb → REb.

Quindi la frequenza del REb è $(2/3)^5 f$.

Contemporaneamente, per poterci mantenere nell'ambito di una sola ottava, dobbiamo salire di 3 ottave, quindi la frequenza del REb è $(2/3)^5 2^3 f$.

Quindi:

$$\text{comma pitagorico} = f_{DO\#} / f_{REb} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^4 f}{\left(\frac{2}{3}\right)^5 2^3 f} = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

Notiamo che nell'articolo ho detto che il comma pitagorico si ottiene salendo di un tono e scendendo di due semitoni.

Infatti, questo è un altro modo di avere due suoni omologhi. Partiamo ad esempio dal DO di frequenza f e vediamo come arriviamo allo stesso risultato.

Innanzitutto salire di un tono significa salire di due quinte (partiamo ad esempio dal DO)

DO → SOL → RE

e scendere di un'ottava, ossia significa moltiplicare la frequenza iniziale del fattore

$$(3/2)^2 (1/2).$$

Contemporaneamente, nel sistema pitagorico, scendere di un semitono significa salire di 5 quinte

DO → SOL → RE → LA → MI → SI

e scendere di 3 ottave, in quanto la nota finale (il SI) deve trovarsi un semitono sotto quella di partenza (il DO).

Quindi, nel sistema pitagorico scendere di un semitono significa moltiplicare la frequenza iniziale del fattore

$$(3/2)^5 (1/2)^3.$$

Perciò, scendere di 2 semitoni significa salire di 10 quinte e scendere di 6 ottave, ossia significa moltiplicare la frequenza iniziale del fattore

$$(3/2)^{10} (1/2)^6.$$

Ora è evidente che salire di un tono e scendere di due semitoni significa moltiplicare la frequenza del suono iniziale per il fattore

$$[(3/2)^2 (1/2)] [(3/2)^{10} (1/2)^6] = (3/2)^{12} (1/2)^7$$

Che è il risultato che abbiamo trovato prima.

Ciò significa che trovare il comma pitagorico significa salire di 12 quinte e di scendere di 7 ottave.

NOTA: in alcune parti si legge che il comma pitagorico è il rapporto tra il semitono cromatico e il semitono diatonico (ricordiamo che il semitono cromatico è un intervallo di semitono in cui i due suoni hanno lo stesso nome e uno di essi è alterato (ad esempio DO-DO#) mentre il semitono diatonico è un intervallo di semitono in cui i due suoni hanno nome diverso (ad esempio DO-REb)). La definizione è esattamente equivalente a quella data all'inizio, perché calcolare il rapporto tra semitono cromatico e diatonico significa calcolare il rapporto tra le frequenze rispettivamente del DO# e del REb (che già abbiamo fatto).