ROTAZIONI (E TEOREMA DI PITAGORA)

Definizione

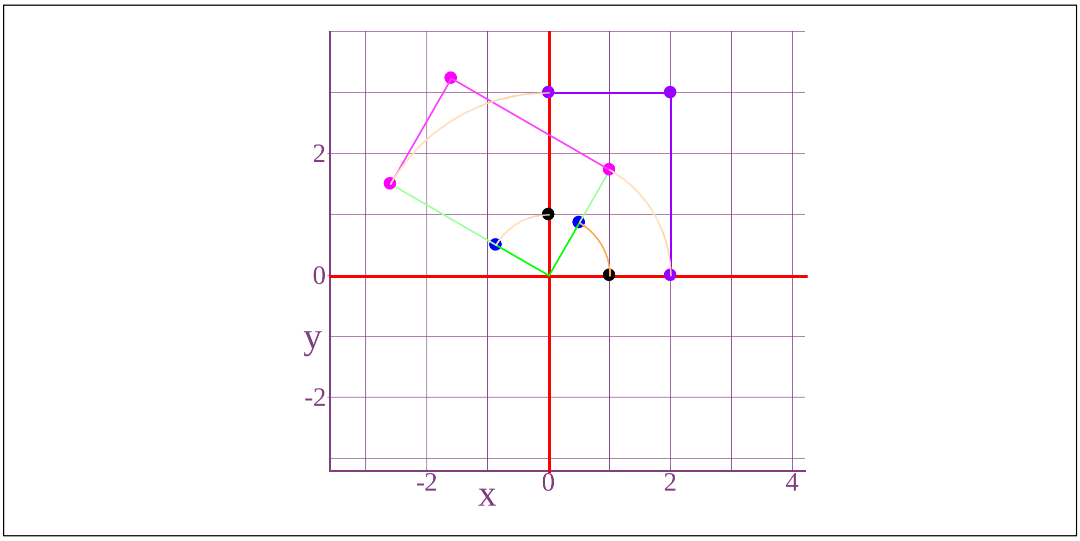
Definiamo rotazione nel piano R^2 una funzione $(x,y) \dashrightarrow f(x,y) = (x',y') \in R^2$, tale che :

1) $f(x,y) = x\, f(1,0) + y\, ort(f(1,0)$, per ogni $(x,y) \in R^2$

dove : $ort(a,b) := (-b,a)$ "ortogonale (antiorario)" di (a,b) .

in parole: il punto ruotato di un qualunque punto ha, rispetto al sistema di riferimento ruotato con la stessa rotazione, le stesse coordinate del punto di partenza.

visualizzazione

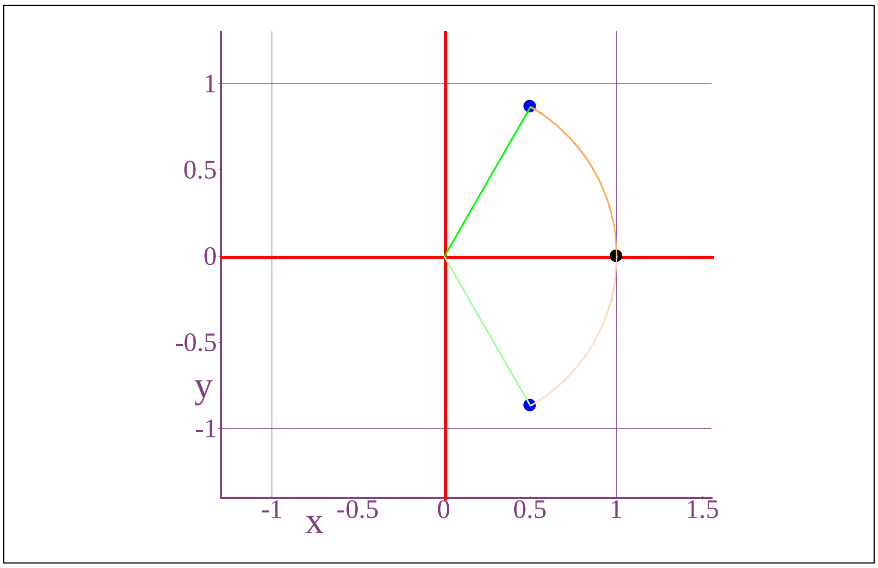


2) $f(\, con(\, f(1,0)\,)\,) = (1,0)$

dove : $con(a,b) := (a,-b)$ "coniugato" di (a,b) .

in parole: il simmetrico rispetto all'asse delle ascisse del punto ruotato di (1,0), ossia del punto unità, sottoposto alla stessa rotazione restituisce lo stesso (1,0).

visualizzazione



Equazioni

Usiamo le proprietà 1 e 2 di una rotazione per scrivere delle regole :

Regole

Upon Simplify transform $\operatorname{ort}(\mathbb{x}, \mathbb{y})$ into $(-\mathbb{y}, \mathbb{x})$.

Upon Simplify transform $\operatorname{con}(\mathbb{x}, \mathbb{y})$ into $(\mathbb{x}, -\mathbb{y})$.

Upon Expand transform $f(\mathbb{x}, \mathbb{y})$ into $\mathbb{x}\, f(1,0) + \mathbb{y}\, \operatorname{ort}(f[1,0])$.

Upon Transform transform $f([f\{1,0\}]_1, -[f\{1,0\}]_2)$ into $(1,0)$.

regole di scalarizzazione :

Upon Transform transform $(\mathbb{x}, \mathbb{y}) = (\mathbb{u}, \mathbb{v})$ into $\mathbb{x} = \mathbb{u}$.

Upon Transform transform $(\mathbb{x}, \mathbb{y}) = (\mathbb{u}, \mathbb{v})$ into $\mathbb{y} = \mathbb{v}$.

estrazione di radice quadrata

Upon Transform transform $\mathbb{x}^2 = \mathbb{y}$ into $(\mathbb{x} = \sqrt{\mathbb{y}}) + (\mathbb{x} = -\sqrt{\mathbb{y}})$.

Proprietà dedotte :

rotazione dell'unità otogonale (0,1) :

$f(0,1)$

$f(0,1) = \operatorname{ort}(f[1,0])$

espressione di una rotazione e vincolo su f(1,0) :

se :

$f(1,0) = (a, b)$

$f(x, y) = (x', y')$

allora :

$f(x, y)$

$f(x, y) = f(1,0)x + \operatorname{ort}(f[1,0])y$

$f(x, y) = (a, b)x + (-b, a)y$

$(x', y') = (a, b)x + (-b, a)y$

$(x', y') = (a x - b y, b x + a y)$

prima conseguenza

$x' = a x - b y$

$y' = b x + a y$

osservazione: il risultato di una rotazione si può calcolare tramite la moltiplicazione di numeri complessi

$(a + b i)(x + y i)$

$(a + b i)(x + y i) = a x + b i x - b y + a i y$

$(a + b i)(x + y i) = a x - b y + a i y + b i x$

$$(a+bi)(x+yi) = ax-by+i(bx+ay)$$
$$ax-by = x'$$
$$bx+ay = y'$$
$$(a+bi)(x+yi) = i(bx+ay)+x'$$
$$(a+bi)(x+yi) = x'+iy'$$

$$f(a,-b)$$
$$f(a,-b) = a\,f(1,0) - b\,\mathrm{ort}(f[1,0])$$
$$f(a,-b) = -b(-b,a)+a(a,b)$$
$$f(a,-b) = (a^2+b^2,0)$$
$$f([f\{1,0\}]_1,-b) = (a^2+b^2,0)$$
$$f([f\{1,0\}]_1,-[f\{1,0\}]_2) = (a^2+b^2,0)$$
$$(1,0) = (a^2+b^2,0)$$
$$1 = a^2+b^2$$

seconda conseguenza

$a^2+b^2 = 1$ questa è una delle forme del teorema di Pitagora

quindi :

$$b^2 = -a^2+1$$
$$\left(b = \sqrt{-a^2+1}\right)+\left(b = -\sqrt{-a^2+1}\right)$$

modulo di un punto (x,y)

se : f è una rotazione, m è un numero non negativo e

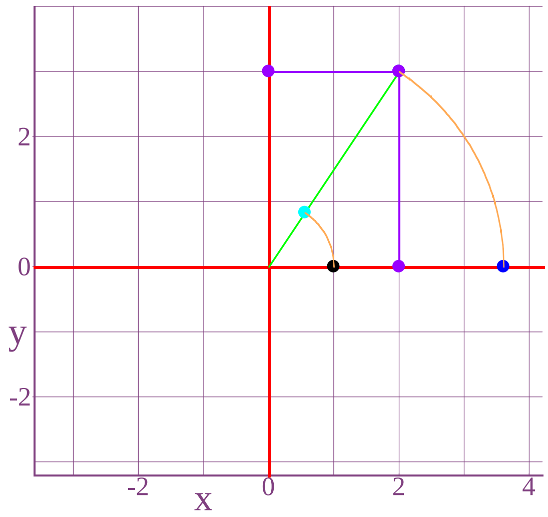
$f(m,0) = (x,y)$

allora :

$$f(1,0)m = (x,y)$$
$$(a,b)m = (x,y)$$
$$(am,bm) = (x,y)$$
$$am = x$$
$$bm = y$$
$$x^2+y^2$$
$$x^2+y^2 = (am)^2+y^2$$
$$x^2+y^2 = (am)^2+(bm)^2$$
$$x^2+y^2 = a^2m^2+b^2m^2$$
$$x^2+y^2 = (a^2+b^2)m^2$$
$$x^2+y^2 = m^2$$
$$m^2 = x^2+y^2$$

$m = \sqrt{x^2+y^2}$ m è detto "modulo" di (x,y) ed esprime la distanza di (x,y) dall'origine (0,0) .

visualizzazione



Osservazioni

Una funzione soddisfacente solo alla proprietà 1 è detta rotoomotetia.
Per quanto esposto si può concludere che una rotoomotetia f è una rotazione se e solo se f(1,0) = (a,b) verifica la relazione pitagorica $a^2 + b^2 = 1$. Infatti se f è una rotazione la rotoomotetia f verifica la 2 e quindi vale la dimostrazione già svolta. Se invece f è una rotoomotetia per cui vale il vincolo pitagorico su scritto allora:

$$f(a,-b)$$

$$f(a,-b) = a\, f(1,0) - b\, \mathrm{ort}(f[1,0])$$

$$f(a,-b) = -b(-b,a) + a(a,b)$$

$$f(a,-b) = (a^2+b^2,0)$$

$$f(a,-b) = (1,0)$$

ossia la proprietà 2, per cui f è una rotazione.

TRASLAZIONI E ROTAZIONI

regole

definizioni generali

$\mathrm{con}(z) = z^{\dagger}$ △ $(3+2i)^{\dagger} = 3-2i$

$\mathrm{inv}(z) = i\,z^{\dagger}$ △ $\mathrm{inv}(3+2i) = 2+3i$

$\mathrm{ort}(z) = i\,z$ △ $\mathrm{ort}(3+2i) = -2+3i$

Upon [Transform] transform $\mathrm{unitario}(z) = \mathrm{vero}$ into $z\,z^{\dagger} = 1$.

traslazioni (vettori)

Upon [Simplify] transform $T_{z}(w)$ into $w + z$.

Upon [Transform] transform $T_{z} + T_{u}$ into T_{z+u}.

Upon [Transform] transform $n\,T_{z}$ into $T_{n\,z}$.

Upon [Transform] transform T_{0} into Ω. **funzione "identità" : W(z) = z**

Upon [Transform] transform Ω into T_{0}.

Upon [Transform] transform $-T_{z}$ into T_{-z}.

rotodilatazioni (rotoomotetie) e rotazioni (angoli)

Upon [Simplify] transform $R_{z}(w)$ into $w\,z$.

Upon [Transform] transform $R_{z} + R_{u}$ into $R_{z\,u}$. Upon [Transform] transform $n\,R_{z}$ into $R_{z^{n}}$.

Upon [Transform] transform R_{1} into Ω. Upon [Transform] transform Ω into R_{1}.

Upon [Transform] transform $-R_{z}$ into $R_{\frac{1}{z}}$. Upon [Transform] transform $-n\,R_{z}$ into $n\left(-R_{z}\right)$.

Upon [Simplify] transform ort into R_{i}. Upon [Simplify] transform R_{i} into ort.

Upon [Simplify] transform opp into R_{-1}. Upon [Simplify] transform R_{-1} into opp.

grado (come numero complesso)

Upon [Simplify] transform grd into $i^{\frac{1}{90}}$.

$\mathrm{grd} = i^{\frac{1}{90}}$

△ $\mathrm{grd} = 0.99985+0.017452\,i$

grado (come rotazione)

Upon [Simplify] transform γ into R_{grd}. **la usuale notazione per n g è n° .**

angoli associati :

Upon [Transform] transform $\mathrm{supplementare}(p)$ into $180\,\gamma - p$.

Upon [Transform] transform $\mathrm{esplementare}(p)$ into $360\,\gamma - p$.

Upon [Transform] transform $\mathrm{complementare}(p)$ into $90\,\gamma - p$.

$90\,\gamma$

△ $90\,\gamma = 90\,R_{\mathrm{grd}}$ △ $90\,\gamma = 90\,R_{i^{\frac{1}{90}}}$ △ $90\,\gamma = R_{\left(i^{\frac{1}{90}}\right)^{90}}$ △ $90\,\gamma = R_{i}$

△ $90\,\gamma = \mathrm{ort}$

$180\,\gamma$

$\triangle\, 180\gamma = 180 R_{grd}$ $\triangle\, 180\gamma = 180 R_{\frac{1}{i^{90}}}$ $\triangle\, 180\gamma = R_{\left(\frac{1}{i^{90}}\right)^{180}}$ $\triangle\, 180\gamma = R_{-1}$

$\triangle\, 180\gamma = \text{opp}$

$\square\, 270\gamma$

$\triangle\, 270\gamma = 270 R_{grd}$ $\triangle\, 270\gamma = 270 R_{\frac{1}{i^{90}}}$ $\triangle\, 270\gamma = R_{\left(\frac{1}{i^{90}}\right)^{270}}$ $\triangle\, 270\gamma = R_{-i}$

$\square\, -R_i$ $\triangle\, -R_i = R_{\frac{1}{i}}$ $\triangle\, -R_i = R_{-i}$

$\triangle\, 270\gamma = -R_i$ $\triangle\, 270\gamma = -\text{ort}$

$\square\, 360\gamma$

$\triangle\, 360\gamma = 360 R_{grd}$ $\triangle\, 360\gamma = 360 R_{\frac{1}{i^{90}}}$ $\triangle\, 360\gamma = R_{\left(\frac{1}{i^{90}}\right)^{360}}$ $\triangle\, 360\gamma = R_1$

$\triangle\, 360\gamma = \Omega$

$\square\, 0\gamma$

$\triangle\, 0\gamma = 0 R_{grd}$ $\triangle\, 0\gamma = 0 R_{\frac{1}{i^{90}}}$ $\triangle\, 0\gamma = R_{\left(\frac{1}{i^{90}}\right)^{0}}$ $\triangle\, 0\gamma = R_1$ $\triangle\, 0\gamma = \Omega$

$\triangle\, 0\gamma = 360\gamma$

$\square\, -180\gamma$ $\triangle\, -180\gamma = -180 R_{grd}$ $\triangle\, -180\gamma = 180\left(-R_{grd}\right)$ $\triangle\, -180\gamma = 180\left(-R_{\frac{1}{i^{90}}}\right)$

$\triangle\, -180\gamma = 180 R_{\frac{1}{\frac{1}{i^{90}}}}$ $\triangle\, -180\gamma = R_{\left(\frac{1}{\frac{1}{i^{90}}}\right)^{180}}$ $\triangle\, -180\gamma = R_{-1}$ $\triangle\, -180\gamma = \text{opp}$

$\triangle\, -180\gamma = 180\gamma$

$\square\, \alpha = R_a$ $\square\, \text{unitario}(a) = \text{vero}$ $\triangle\, a\, a^{\dagger} = 1$ $\triangle\, a^{\dagger} = \frac{1}{a}$

$\square\, \text{supplementare}(\alpha)$ $\triangle\, \text{supplementare}(\alpha) = 180\gamma - \alpha$

$\triangle\, \text{supplementare}(\alpha) = 180\gamma - R_a$ $\triangle\, \text{supplementare}(\alpha) = R_{-1} - R_a$

$\triangle\, \text{supplementare}(\alpha) = R_{-1} + R_{\frac{1}{a}}$ $\triangle\, \text{supplementare}(\alpha) = R_{(-1)\frac{1}{a}}$

$\triangle\, \text{supplementare}(\alpha) = R_{-\frac{1}{a}}$ $\triangle\, \text{supplementare}(\alpha) = R_{-a^{\dagger}}$

$\square\, \text{esplementare}(\alpha)$ $\triangle\, \text{esplementare}(\alpha) = 360\gamma - \alpha$

$\triangle\, \text{esplementare}(\alpha) = R_1 - \alpha$ $\triangle\, \text{esplementare}(\alpha) = R_1 - R_a$

$\triangle\, \text{esplementare}(\alpha) = R_1 + R_{\frac{1}{a}}$ $\triangle\, \text{esplementare}(\alpha) = R_{1\frac{1}{a}}$

$\triangle\, \text{esplementare}(\alpha) = R_{\frac{1}{a}}$ $\triangle\, \text{esplementare}(\alpha) = R_{a^{\dagger}}$

$\square\, -\alpha$ $\triangle\, -\alpha = -R_a$ $\triangle\, -\alpha = R_{\frac{1}{a}}$ $\triangle\, -\alpha = R_{a^{\dagger}}$

$\square\, \text{complementare}(\alpha)$ $\triangle\, \text{complementare}(\alpha) = 90\gamma - \alpha$

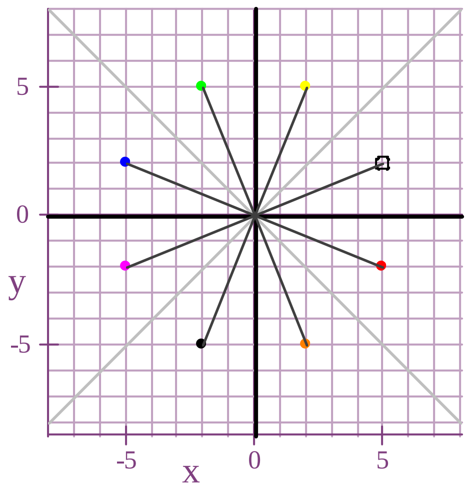
$\triangle\, \text{complementare}(\alpha) = R_i - \alpha$ $\triangle\, \text{complementare}(\alpha) = R_i - R_a$

$\triangle\, \text{complementare}(\alpha) = R_i + R_{\frac{1}{a}}$ $\triangle\, \text{complementare}(\alpha) = R_{i\frac{1}{a}}$

$\triangle$ complementare(α) = R_{ia^+}

$\triangle$ complementare(α) = $R_{inv(a)}$

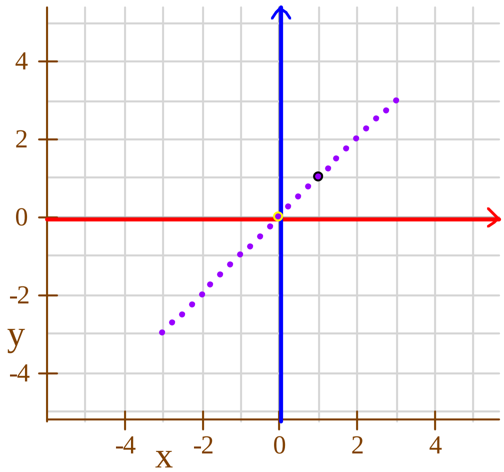
rappresentazione di z e dei sette punti ad esso associati :
inv(z) , ort(z) , - con(z) , - z , - inv(z) , - ort(z) , con(z)



$z = 5+2i$

rappresentazione di z k con k da m a M a intervalli di 1/n

$z = 1+i$ $m = -3$ $M = 3$ $n = 4$



rappresentazione di z^k con k da m a M a intervalli di 1/n

$z = i$ $m = 0$ $M = 4$ $n = 6$