Programmazione di MATEMATICA
classe 3°SE – anno scolastico 2010-2011
docente: Gaetano Speranza

Richiami sugli insiemi numerici N, Z, Q, R e sulle operazioni in essi. Il concetto di funzione. Inversione di una funzione.

Il piano cartesiano. Il punto 0 e la rappresentazione dei punti del piano come vettori applicati in 0. Operazione di addizione di vettori (regola del parallelogramma). Introduzione del punto unità (1) e dell'asse reale R. Moltiplicazione di un numero reale per un vettore (regola dei triangoli proporzionali, o di Talete). Proprietà delle operazioni di addizione (associatività, commutatività, neutralità di 0, simmetria degli opposti) e di moltiplicazione a coefficiente reale (associatività, commutatività, neutralità di 1, inversione dei numeri reali non nulli).
Generazione del piano cartesiano a partire da tre punti non allineati 0, 1, i (unità immaginaria) tramite le operazioni di addizione e moltiplicazione a coefficienti reali. Disposizione ortonormale antioraria della terna 0, 1, i. Operatori reali di base su numeri complessi: Re, Im, (... , ...), - , conj, ort.
Equazione parametrica di una retta (R·a) passante per l'origine: p=t·a. Funzioni lineari (rette passanti per l'origine, o anche proporzionalità dirette): il concetto di "pendenza" di una retta.

Traslazioni e rette non passanti per l'origine: R·a+b. Equazione di una retta in forma vettoriale (p=t·a+b) e in forma di componenti scalari ($x=t\cdot a_x+b_x$, $x=t\cdot a_y+b_y$). Equazioni delle rette in forma cartesiana esplicita (o funzionale):

y= *pendenza* · x + *quota*.

Le otto isometrie di base: l'identità, l'opposizione, la coniugazione, la coniugazione opposta, le ortogonalità antioraria ed oraria, le simmetrie assiali rispetto alle due bisettrici dei quadranti del piano cartesiano.
Ortogonalità fra rette. Relazione fra le pendenze di rette ortogonali fra di loro. Simmetria assiale rispetto a una retta data (asse di simmetria). Il teorema di Pitagora dimostrato tramite simmetrie assiali.

Circonferenza goniometrica. Funzioni coseno e seno. La tangente come rapporto fra seno e coseno.

Trasformazione affine che porta la terna (0,1,i) nella terna (0,P,Q), con il caso particolare della trasformazione che porta (0,1,i) nella terna ($0,P,P^{\perp}$) e applicazione alla determinazione delle formule di addizione angolare tramite coseno e seno.

Moltiplicazione di due numeri complessi introdotta con l'uso dell'ortogonale del moltiplicando:

$$a\,b = (\,a_x + a_y\, i)\,b = (\,a_x 1 + a_y 1^{\perp}\,)\,b = a_x b + a_y b^{\perp}\,.$$

Determinazione grafica del prodotto (concetti grafici di roto-dilatazione, roto-contrazione e rotazione) ed espressione algebrica del prodotto.

Potenze di un numero complesso e spirali centrifughe, centripete e incluse nella circonferenza goniometrica.

Formula di Eulero: $\lim_{n\to\infty}(1+i\cdot t/n)^n = \cos t + i\cdot \sin t$. Notazione esponenziale del primo membro della formula suddetta: exp(i·t), ovvero $e^{i\cdot t}$.
Formula $e^{\pi\cdot i} -1 = 0$.

Programmazione di MATEMATICA
classe 4°SE – anno scolastico 2010-2011
docente: Gaetano Speranza

Insiemi e relazioni. Univocità e funzioni come relazioni univoche. Dominio e codominio. Funzioni potenza, ovvero della forma $y=x^n$; funzioni di primo grado y=ax+b e funzioni di secondo grado del tipo $y=ax^2+b$. Simmetrie interne dei grafici di funzioni, rispetto all'origine e rispetto all'asse delle ordinate (funzioni dispari e pari). Simmetrie fra grafici di funzioni diverse, in particolare la simmetria rispetto alla bisettrice y=x sussistente tra grafici di funzioni inverse.
Trasformazioni geometriche su grafici di funzioni; studio "qualitativo" di una funzione. Segno di una funzione. Il concetto di successione come funzione definita sui numeri naturali. Progressioni aritmetiche e geometriche. Simbolo di sommatoria e somma dei termini di una progressione aritmetica e di una progressione geometrica; applicazione del secondo tipo di somma al calcolo della frazione che genera un numero periodico, mediante l'introduzione del concetto intuitivo di limite di una successione. Le progressioni geometriche in alcune applicazioni: scissione batterica, note musicali e frequenze acustiche, capitalizzazione. Estensione di una progressione geometrica, definita sul dominio dei numeri naturali, a una funzione definita su quello dei numeri razionali (sia positivi sia negativi): potenze con esponente frazionario ed esempio della progressione dodecafonica con ragione la radice dodicesima di 2. La funzione $y=2^x$ e la sua estensione al dominio di tutti i numeri reali (estensione di una funzione esponenziale ai valori irrazionali di x). Andamento di una funzione esponenziale $y=a^x$, vincolo di positività per la base, simmetria dei grafici delle funzioni esponenziali in basi reciproche. Il concetto di logaritmo, ricavato da un problema pratico di determinazione del tempo di sviluppo di una quantità iniziale che cresce o decresce in base a un certo tasso di crescita/decrescita. Le notazioni $\exp_a$ e $\log_a$ e la determinazione del grafico delle funzioni logaritmiche per simmetrizzazione delle corrispondenti esponenziali, rispetto alla bisettrice y=x. Proprietà formali di base delle funzioni esponenziali e logaritmiche. Il numero di Nepero, introdotto in maniera pratica come capitale sviluppato dopo un anno da un'unità monetaria, con un tasso teorico annuale del 100% (ovvero pari a 1) e con ricapitalizzazione istante per istante (capitalizzazione continua). Il numero di Nepero come base della funzione esponenziale limite a cui tendono le funzioni esponenziali passanti per i punti (1/n, 1+1/n), per n tendente a infinito, ognuna avente base $e_n=(1+1/n)^n$; interpretazione geometrica di tale limite come funzione esponenziale di pendenza unitaria in x=0, ovvero con retta tangente in (0,1) avente pendenza 1, ovvero tangente in (0,1) alla retta y=x+1. Approssimazione della funzione esponenziale e^x tramite la funzione, costruibile con riga (quindi tramite il solo concetto grafico di parallelismo), definita scegliendo un numero naturale n (abbastanza alto) e congiungendo i punti di ascissa m/n e di ordinata $(1+1/n)^m$, ottenuti con valori interi positivi di m (m=0, ±1, ±2, ±3, ...) ed estensione di tale procedimento al caso di pendenza k diversa da 1, ossia ai punti di ascissa m/n e di ordinata $(1+k/n)^m$, che conducono ad approssimare la funzione e^{kx} tramite la funzione esponenziale che interseca la retta y=kx+1 nel punto (1/n , 1+k/n). Generalizzazione all'approssimazione di e^x tramite la funzione esponenziale passante per il punto (h,1+h) e limite $\lim_{h\to 0} (1+h)^{1/h} = e$ nonché all'approssimazione di e^{kx} tramite la funzione esponenziale passante per il punto (h,1+kh) e limite $\lim_{h\to 0} (1+kh)^{1/h} = e^k$. Notazione "exp" (esponenziale naturale o neperiana) al posto di $\exp_e$ e "ln" (logaritmo naturale o neperiano) al posto di $\log_e$. Un esempio di come il numero di Nepero interviene in meccanica: la trasmissione di tensione su una cinghia aderente ad una puleggia liscia (ovvero non dentata) per un angolo pari ad α e con un coefficiente di attrito pari a f : formula $T = t \cdot e^{f\alpha}$. Grafici traslati di una funzione f tramite il vettore (h,k) e formula y=f(x-h)+k. Grafici dilatati/contratti di una funzione f tramite rapporto orizzontale h e rapporto verticale k e formula y=k f(x/h). Cambiamento di scala sull'asse delle ascisse con rapporto r e deduzione grafica del fatto che la funzione e^{rx} è tangente in (0,1) alla retta y=rx+1 a partire dal fatto che la funzione e^x è tangente in (0,1) alla retta y=x+1. Determinazione di tutte le funzioni esponenziali a partire dalla funzione esponenziale naturale tramite trasformazione di scala di rapporto 1/r (con r positivo o negativo) sulle ascisse. Trasformazione della funzione $\exp_a$ nella forma exp(rx) e pendenza della funzione $\exp_a$ pari a r=ln(a). La derivata di una funzione e il suo utilizzo nello studio del grafico delle funzioni. Derivate di funzioni elementari e principali regole di derivazione (derivata di una combinazione lineare di funzioni, derivata del prodotto, del reciproco, del composto e dell'inverso.

Programmazione di MATEMATICA
classe 5°SE – anno scolastico 2010-2011
docente: Gaetano Speranza

Concetti di funzione e di dominio di una funzione. Rappresentazione grafica di una funzione in un piano cartesiano. Funzioni della forma $y=ax+b$ e loro rappresentazione tramite rette. Trasformazioni geometriche agenti su grafici di funzioni, studio "qualitativo" di una funzione. Successioni (funzioni aventi come dominio N oppure N^+) e loro rappresentazione.
Concetto intuitivo di limite di una successione ed esempio del numero di Nepero come numero che scaturisce dal modello matematico della capitalizzazione continua.
La successione $e_n = (1+1/n)^n$ e l'interpretazione di e_n come base della funzione esponenziale passante - oltre che per il punto (0,1) – per il punto (1/n , 1+1/n), che appartiene alla retta $y=x+1$ e tende al punto (0,1) quando n tende ad infinito. La funzione esponenziale naturale come funzione esponenziale avente pendenza pari ad 1 nel punto (0,1).
Esempi di limiti di successioni espresse dal quoziente di due polinomi.
Il limite della successione $(1+x/n)^n$, pari alla potenza e^x. Utilizzo del limite precedente per mostrare come l'esponenziale naturale è approssimabile tramite potenze con esponenti naturali (ad esempio $e^{3.1234}$ è approssimato da 1.0001^{31234} , 1.00001^{312340}, $1.000001^{3123400}$, ecc.).
Espressione di una funzione esponenziale $y=a^x$ come funzione $y=e^{kx}$ con k=ln(a); pendenza pari a k della funzione $y=e^{kx}$ nel punto (0,1) e pendenza pari a ln(a) della funzione $y=a^x$ nel punto (0,1). Concetto intuitivo di limite di una funzione f(x) quando la variabile x tende a un certo valore.
I limiti delle espressioni $(e^h-1)/h$ e $(a^h-1)/h$ quando h tende a 0 (pari il primo ad 1 e il secondo al logaritmo naturale di a).
Crescita di una funzione e notazione $f(b) - f(a) = \left[f(x) \right]_{x=a}^{x=b} = \left[f \right]_a^b$.
Velocità di crescita di una funzione. e rapporto incrementale. Il concetto di derivata, esaminato anche con l'uso del computer. Approssimazione del grafico di una funzione in un suo punto con la retta tangente (problema della linearizzazione locale).
La derivata della funzione e^x e quella della funzione a^x.
Derivata della somma di due funzioni e derivata di un multiplo di una funzione. Derivata del prodotto di due funzioni. Derivata della potenza x^n. Composizione di due funzioni e formula di derivazione della funzione composta. Derivata della funzione seno e derivazione di funzioni composte coinvolgenti la funzione seno. Derivata del reciproco di una funzione e derivata del quoziente di due funzioni.
Integrale indefinito introdotto come insieme di tutte le primitive di una funzione data.
Relazione tra l'incremento Δy di una funzione di primo grado (quindi del tipo f(x)=ax+b) e l'area con segno del rettangolo avente per base l'incremento Δx e per altezza la derivata f'(x)=a (pari alla pendenza di f). Generalizzazione al caso di una funzione il cui grafico è una poligonale e al caso di una funzione f derivabile in un certo intervallo [a,b], per giungere all'uguaglianza dell'incremento f(b) - f(a) con l'area compresa tra la funzione derivata f' e l'asse delle ascisse, limitatamente all'intervallo di base [a,b]. Introduzione del simbolo di integrale definito e teorema fondamentale del calcolo:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$$

Sostituibilità formale della variabile di integrazione con un'altra variabile: $\int_a^b F(x)dx = \int_a^b F(t)dt$, funzione integrale $x \rightarrow \int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$ e uguaglianza dell'integrale indefinito di f' con l'insieme delle funzioni del tipo $\int_a^x f'(t)dt + c$ ottenuto al variare della costante c. Notazione dell'integrale indefinito di una funzione F con il simbolo $\int F(x)dx$ e sostituibilità formale della variabile x con un'altra variabile di integrazione.
Il teorema fondamentale del calcolo nella forma:

$$\int_a^b F(x)dx = \left[\int F(x)dx \right]_a^b$$

Le principali regole di integrazione definita (scambio degli estremi di integrazione, suddivisione dell'intervallo di integrazione [a,b] in unione di sottointervalli [a,c] e [c,b]) e indefinita (integrali indefiniti immediati, decomposizione in somma della funzione integranda, integrazione per parti, integrazione per sostituzione). Applicazione del teorema fondamentale del calcolo alla determinazione di alcune aree di superfici delimitate da curve.