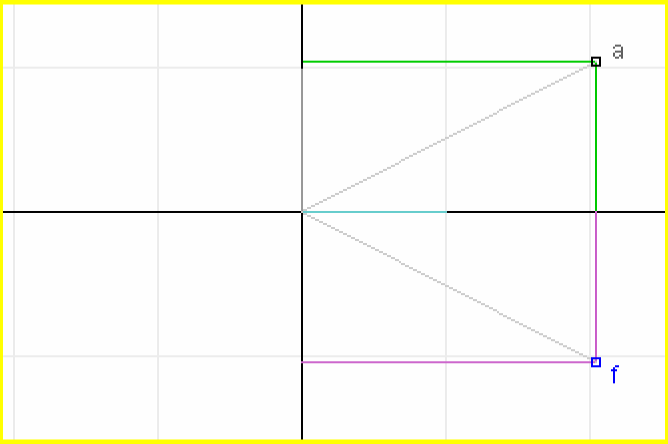
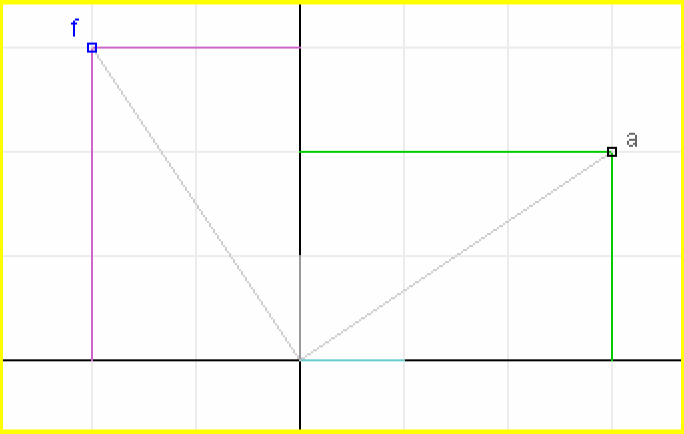
Coniugazione e ortonormalità nel piano complesso

Le simmetrie rispetto agli assi e alle bisettrici dei quadranti del piano cartesiano portano a individuare le seguenti due associazioni :

la coniugazione, che associa ad ogni punto a del piano il suo 'coniugato' conj(a) (o $\bar{a}$)

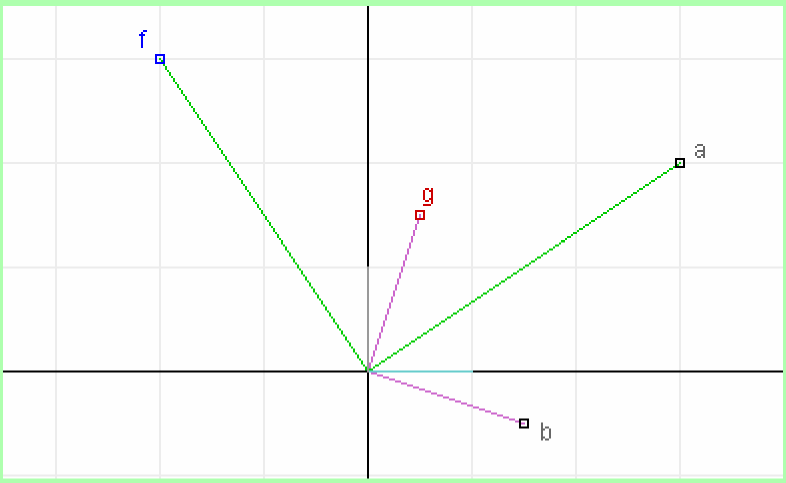


la ortonormalizzazione, che porta a nel suo 'ortonormale' ort(a) (oppure a)



ogni a non nullo determina col suo ortonormale un 'sistema di riferimento'

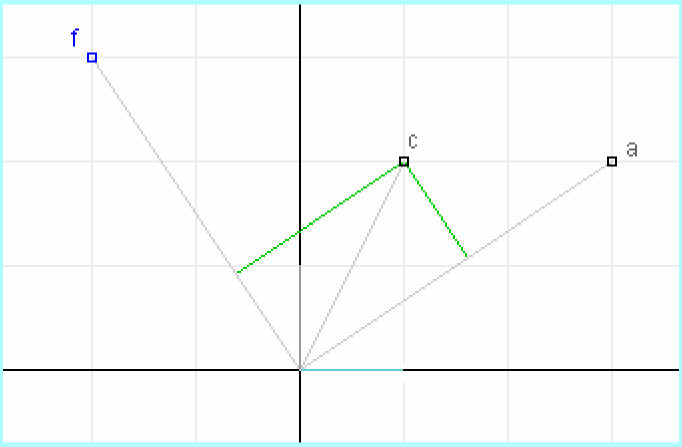
visualizziamo i sistemi di riferimento (S.R.) (a , ort(a)) e (b , ort(b))



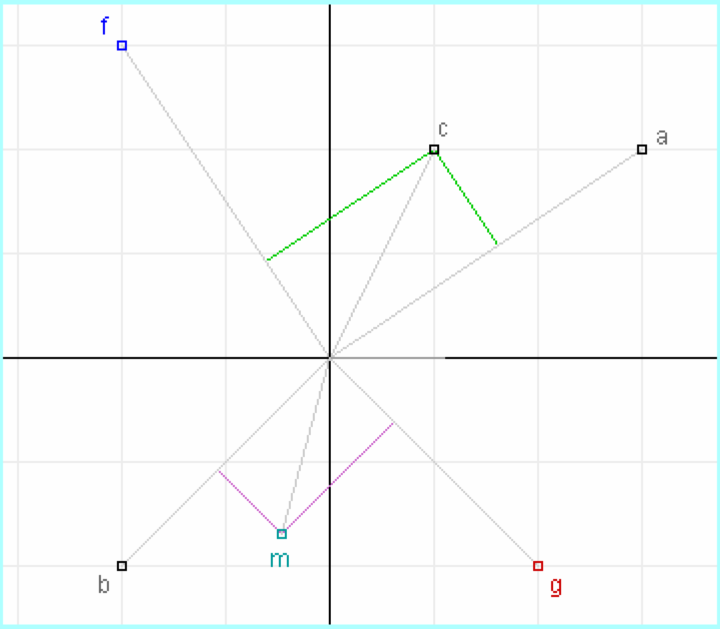
diciamo che c ha coordinate (x,y) rispetto al S.R. (a , ort(a)) se c = x a + y ort(a)

brevemente possiamo dire che x e y sono le coordinate di c rispetto ad a (o 'in' a).

Consideriamo un punto c con le sue coordinate rispetto al S.R. (a , ort(a))



e anche il punto m che ha rispetto a b le stesse coordinate che ha c rispetto ad a



diciamo che c e m sono omotetici (ossia hanno "uguale collocazione") nei due S.R.

oppure che al punto c corrisponde il punto m nella 'omotetia' che porta a in b

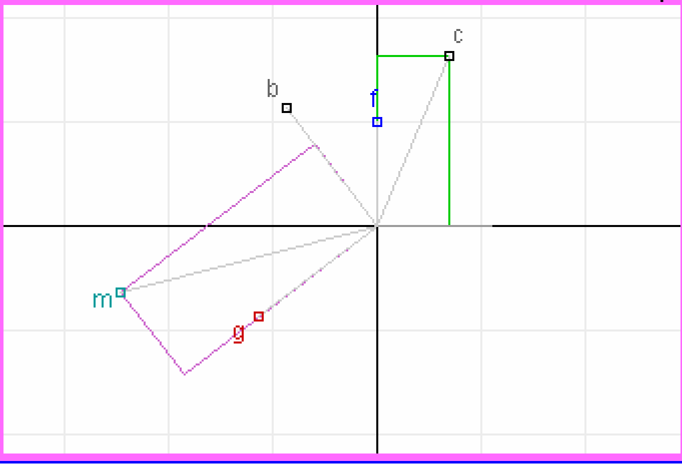
oppure, semplicemente, che c 'sta ad' a come m 'sta a' b (c : a = m : b)

Notiamo che da c : a = d : a segue che c = d (per via delle uguali coordinate in a)

e che da c : a = d : b segue d : b = c : a . Tale osservazione non è banale in quanto la scrittura x:y=z:w , detta *proporzione* , è convenzionale e non si riferisce né alla relazione di uguaglianza né all'operazione di divisione, anzi potrebbe essere pure indicata ad esempio con un'espressione enunciativa tipo: proporzione(x,y,z,w) .

Similmente : da c : a = d : b e d : b = c' : a' segue c : a = c' : a'
(e, naturalmente, si ha anche c : a = c : a)

visualizziamo il caso in cui a = 1 , ossia c : 1 = m : b ; in tal caso si pone m = b·c



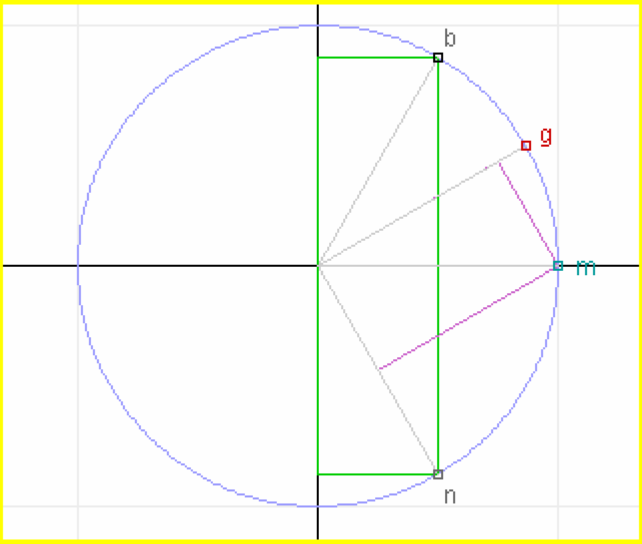
Vedi sotto per le proprietà della ‘moltiplicazione’, ossia dell'operazione (b,c) -> m = b·c

Quindi la interconnessione fra proporzioni e moltiplicazioni è: c:1 = (b·c):b *(b ≠0)*

Ne deduciamo: b/c : 1 = c·(b/c) : c = b : c , il che connette proporzioni e divisione

(sopra abbiamo usato il fatto che c·(b/c)=(b/c)·c=(b·(1/c))·c=b·((1/c)·c)=b·1=b)

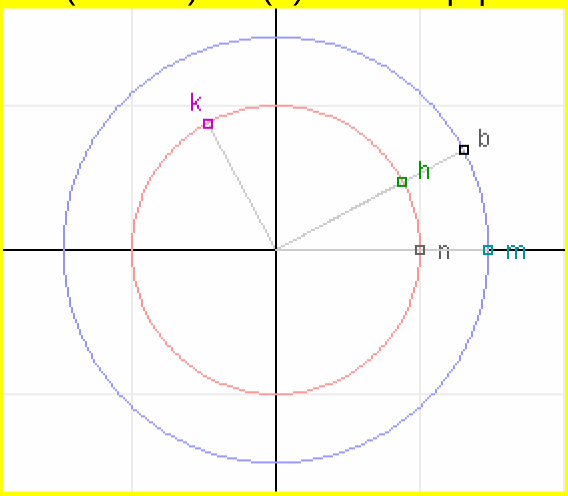
1) I punti b e 1 sono equidistanti dall'origine 0 se b : 1 = 1 : conj(b)



ovvero b dista 1 dall'origine 0 quando si ha 1=conj(b)·b. Un tale b è detto *unitario*.

Generalizzando, se m è reale positivo (m>0) e b : m = m : conj(b), m è il *modulo* di b (b≠0)

che si indica con |b|. Il punto (unitario) h=v(b) tale che |b| : 1 = b : h è il *versore* di b .

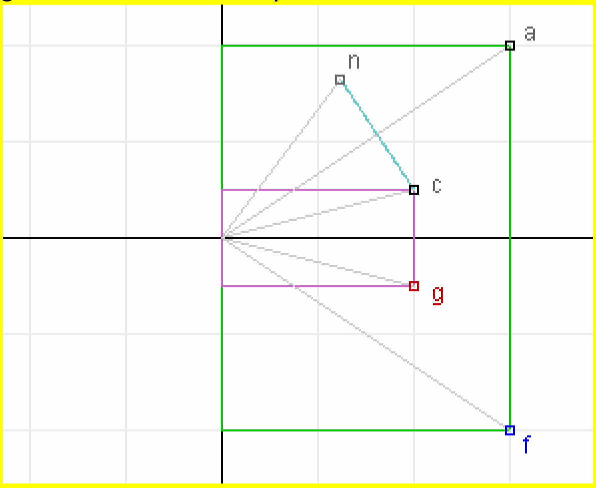


Se b è unitario si ha conj(b)=1/b. In generale l'inverso di b=|b|v(b) è 1/b=(1/|b|)conj(v(b)).

2) La moltiplicazione per un punto b unitario porta 1 in b e il generico c in b·c

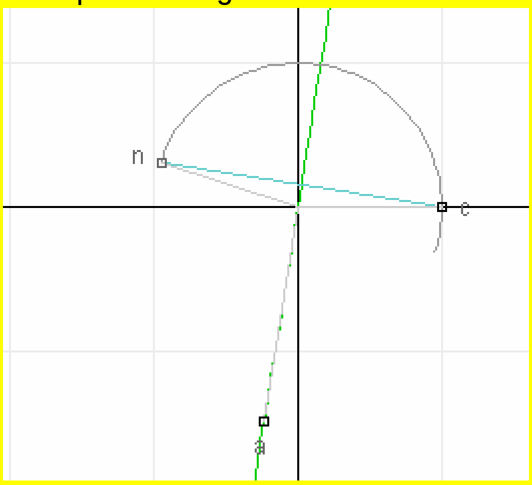
e la trasformazione c -> b·c è la *rotazione* intorno all'origine 0 che porta 1 in b.

3) Dato un punto a non nullo e un punto c per costruire il *simmetrico* di c rispetto alla retta (*asse*) congiungente 0 con a è il punto n tale che n : a = conj(c) : conj(a)



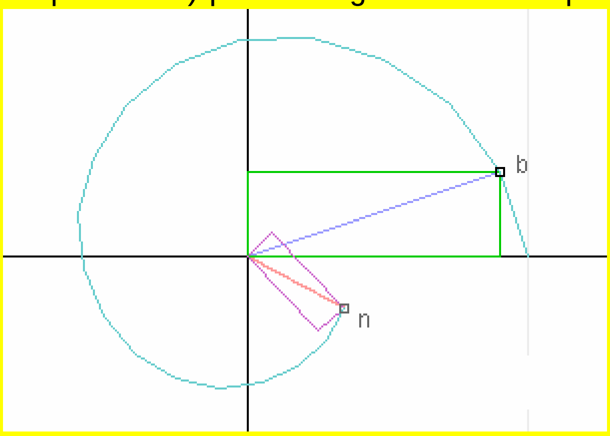
ma n:a=(n/a):1 e conj(c):conj(a)=[conj(c)/conj(a)]:1, quindi n/a=conj(c)/conj(a)

3*) Tramite le *simmetrie assiali* possiamo generare una circonferenza



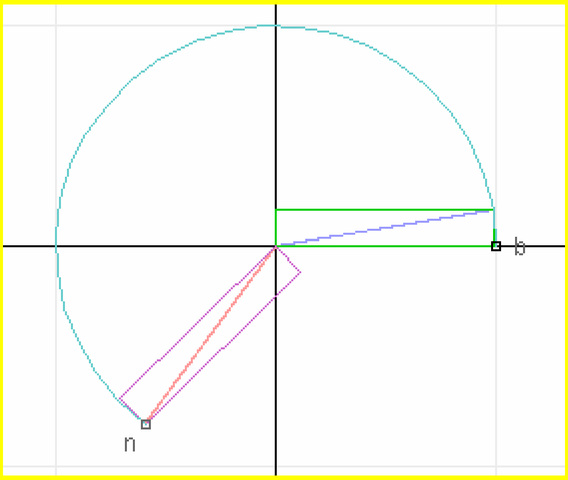
la circonferenza generata da c per simmetrizzazione assiali di c ha raggio 0_c .

2*) Tramite omotetie (moltiplicazioni) possiamo generare una spezzata a spirale



questa è generata dalle potenze di un punto b e se b è unitario ha vertici unitari .

1*) Combiniamo simmetria assiale e omotetie: la spirale parte da un punto unitario



qui è il simmetrico assiale di b che genera la spirale, pertanto b deve essere 1 .

Proprietà della moltiplicazione
commutatività : $a \cdot b = b \cdot a$
associatività : $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
elemento neutro : $a \cdot 1 = a$
invertibilità : se $c \neq 0$ esiste un unico k tale che $c \cdot k=1$. Tale k è detto *inverso* di c e scritto $1/c$
tramite l'inversione si può definire la divisione: $b/c = b \cdot (1/c)$ è detto *quoziente* di b su c $(c \neq 0)$
distributività : $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$