

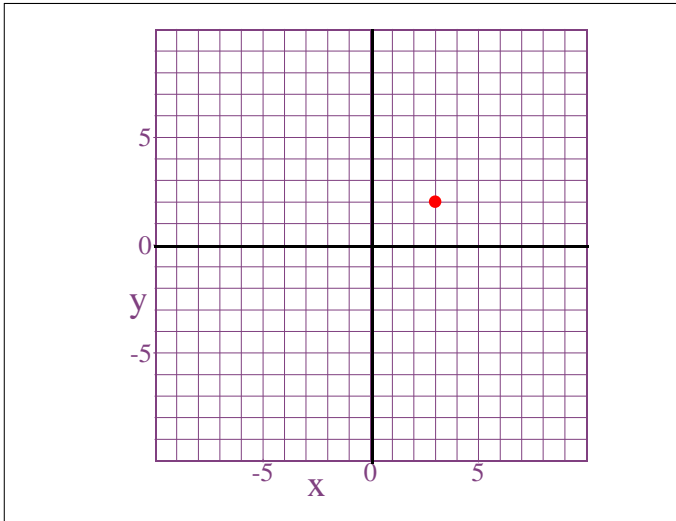
INTRODUZIONE AI NUMERI COMPLESSI

Piano complesso (C) e funzione "punto".

definizione

$$a = 3 + 2i \quad \operatorname{Re}(a) = 3 \quad \operatorname{Im}(a) = 2$$

rappresentazione del numero a :



$$\text{punto}(a) = (3, 2)$$

Addizione e opposizione. Traslazioni.

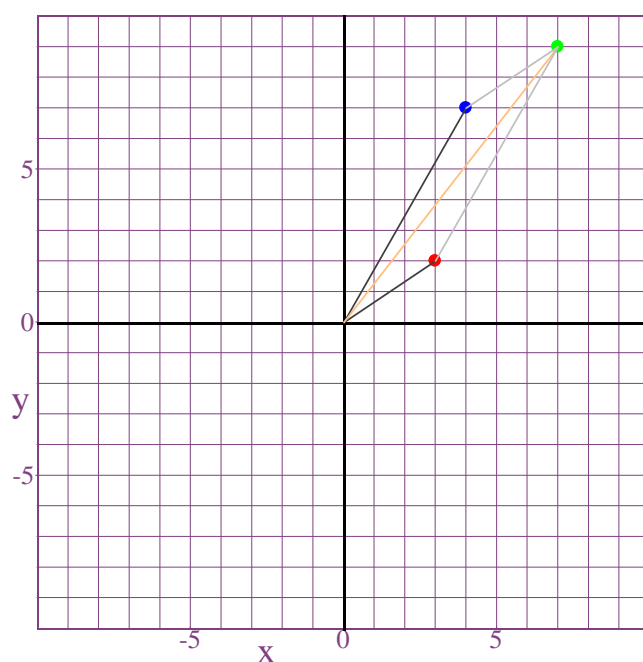
$$(x + y i) + (x' + y' i)$$

$$(x + y i) + (x' + y' i) = x + x' + i y + i y'$$

$$(x + y i) + (x' + y' i) = x + x' + i(y + y')$$

rappresentazione della somma $a + b$:

$$a = 3 + 2i \quad b = 4 + 7i$$

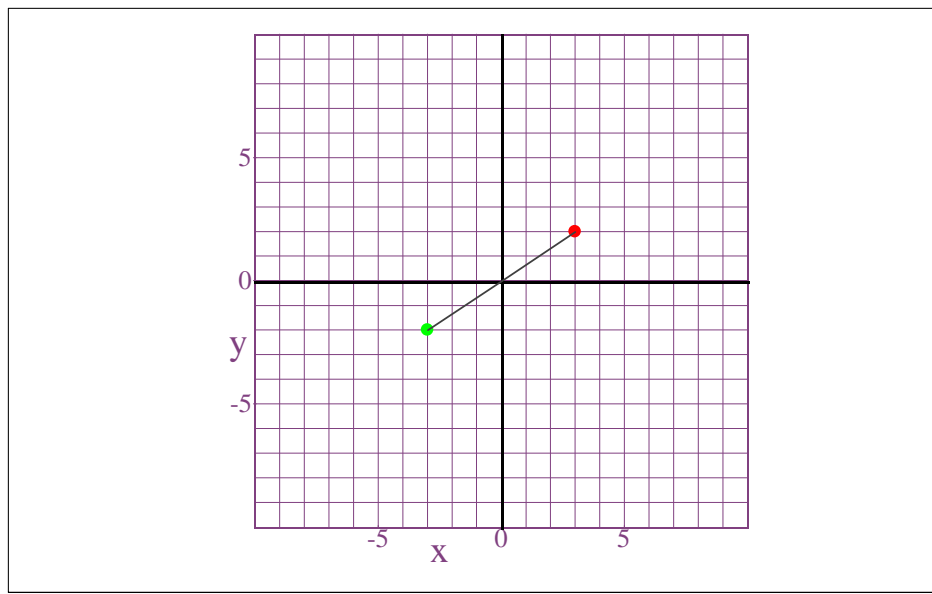


Si ritrova la "regola del parallelogramma" per l'addizione fra vettori.

L'**opposto** di un numero complesso z è definito come il numero $-z$, ossia quel numero complesso che sommato a z dà zero.

rappresentazione dell' opposto di a :

$$a = 3 + 2i$$

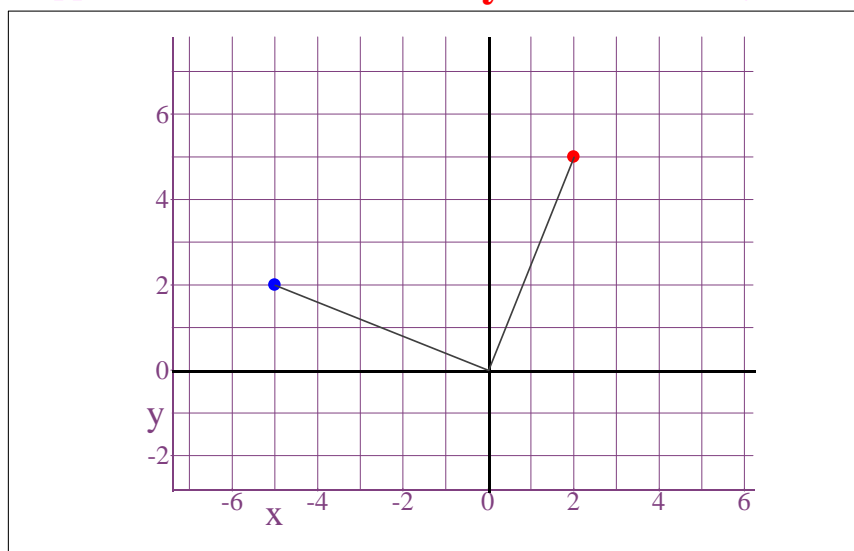


Il numero $a + b$ è detto **traslato** di a con spostamento b . Il processo che porta da a ad $a + b$ è detto **traslazione** di spostamento b

Ortogonalità e moltiplicazione. Rotodilatazioni.

Si dice **ortogonale antiorario** (in breve semplicemente "ortogonale") di un numero $x + yi$ il numero $-y + xi$ indicato con $\text{ort}(x + yi)$ oppure $(x + yi)^{\perp}$.

rappresentazione di $a = x + yi$ e del suo ortogonale antiorario :



$$a = 2 + 5i$$

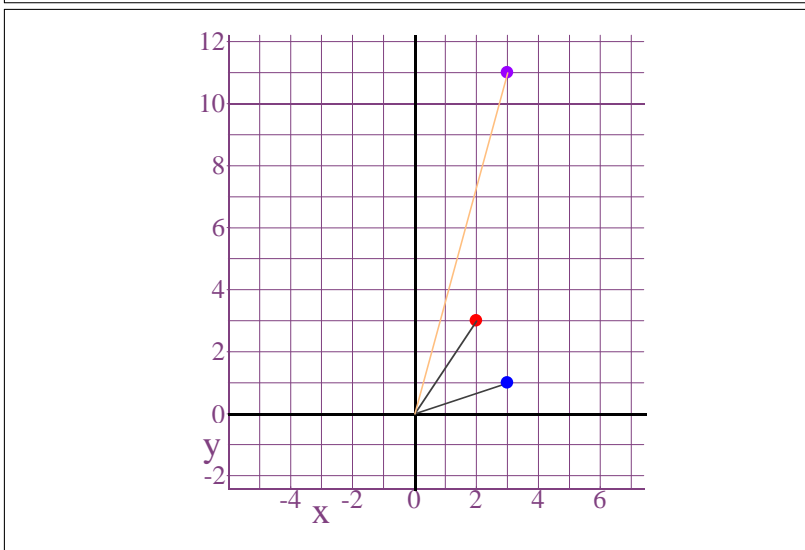
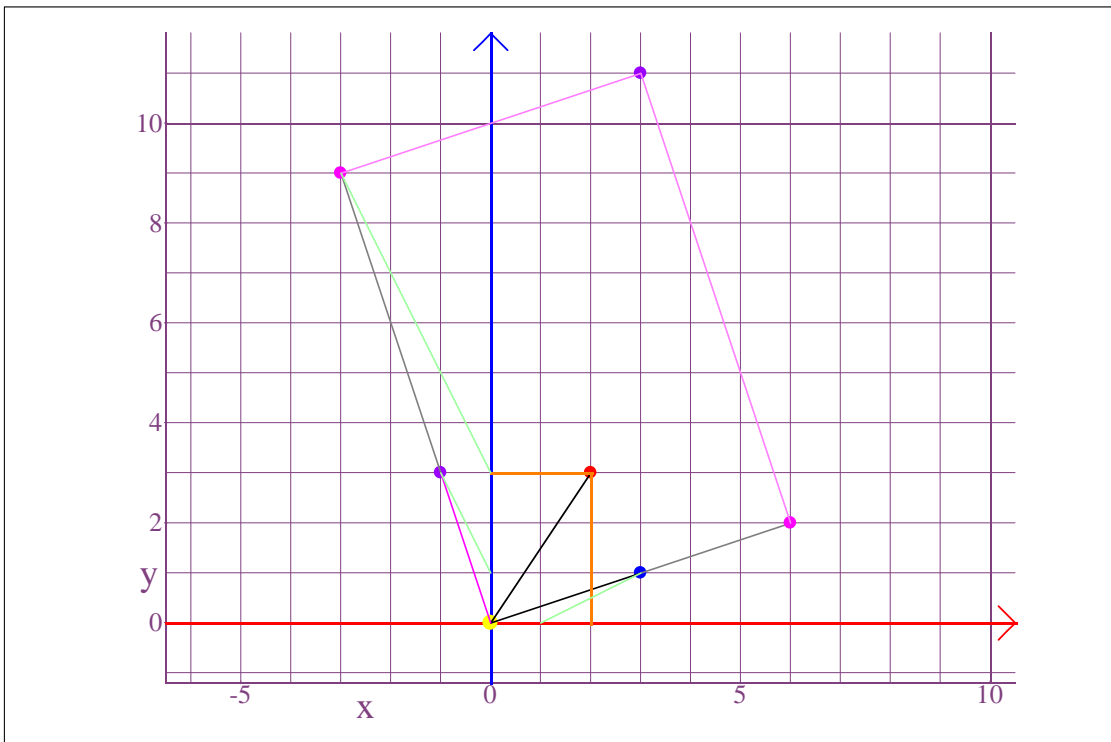
Moltiplicare $x + yi$ per $x' + y'i$ significa esprimere le coordinate x e y di $x + yi$ (moltiplicatore), relative alle unità 1 e i , tramite il numero $x' + y'i$ (moltiplicando) e il suo ortogonale.

$$\begin{aligned} \text{Quindi: } (x + yi)(x' + y'i) &= (x \cdot 1 + y \cdot 1^{\perp}) (x' + y'i) = x(x' + y'i) + y(x' + y'i)^{\perp} \\ &= xx' + xy'i + y(-y' + x'i) = xx' - yy' + xy'i + yx'i = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i \end{aligned}$$

rappresentazione del prodotto ab :

$$a = 2+3i$$

$$b = 3+1i$$



la moltiplicazione per $x'+yi$ rotodilata $x+yi$ con una trasformazione che è detta rotodilatazione che porta 1 in $x'+yi$

la rotodilatazione corrisponde ad un cambiamento dal sistema di riferimento costituito dai numeri 1 e i a quello costituito da $x'+yi$ e dal suo ortogonale.

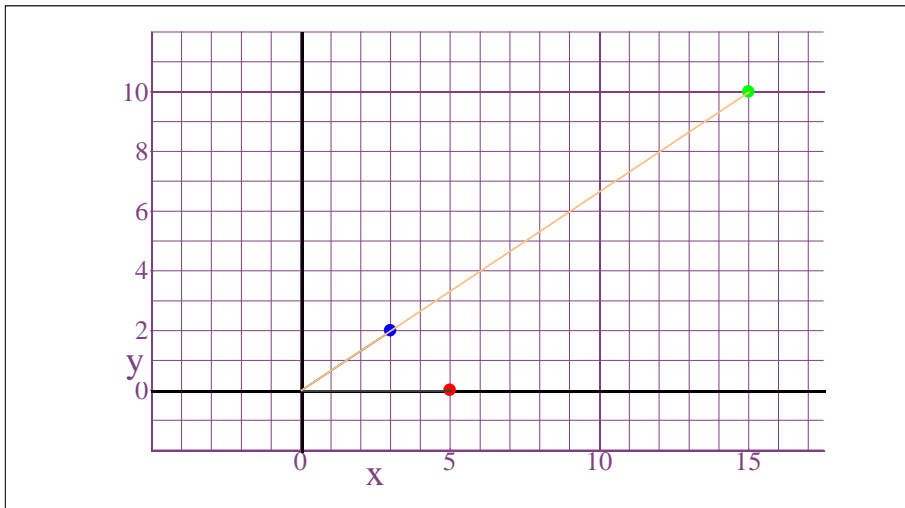
Alcuni casi particolari della moltiplicazione

quando si moltiplica un numero complesso per uno reale si ritrova la regola di moltiplicazione di un vettore per uno scalare (provare a porre b reale e constatare tale fatto).

prodotto $a b$, con b reale :

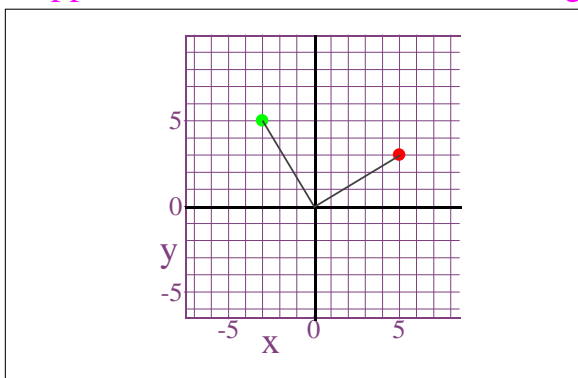
$$a = 5$$

$$b = 3 + 2i$$



quando si moltiplica un numero complesso z per l'unità immaginaria i si ottiene il numero iz **ortogonale** di z .

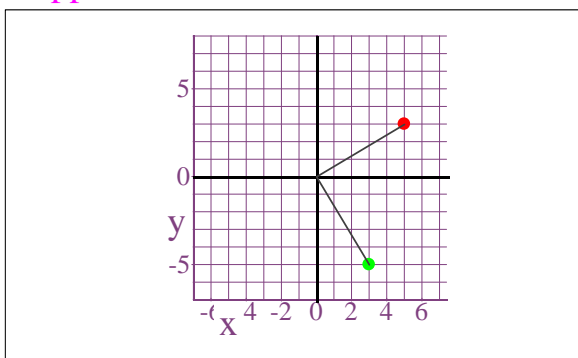
rappresentazione di z e del suo ortogonale iz :



$$z = 5 + 3i$$

L'opposto dell'ortogonale di un numero complesso z coincide con l'ortogonale dell'opposto di z e viene detto **antiortogonale** di z .

rappresentazione di z e del suo antiortogonale $-iz$:



commutatività

$$(x + y i)(x' + y' i)$$

$$(x + y i)(x' + y' i) = x x' + i x' y + i x y' + i^2 y y'$$

$$(x + y i)(x' + y' i) = -y y' + x x' + i x' y + i x y'$$

$$(x + y i)(x' + y' i) = -y y' + x x' + i(x' y + x y')$$

$$(x' + y' i)(x + y i)$$

$$(x' + y' i)(x + y i) = x x' + i x' y + i x y' + i^2 y y'$$

$$(x' + y' i)(x + y i) = -y y' + x x' + i x' y + i x y'$$

$$(x' + y' i)(x + y i) = -y y' + x x' + i(x' y + x y')$$

associatività

$$p_1 = ((x + y i)(x' + y' i))(x'' + y'' i)$$

$$p_1 = x x' x'' - x'' y y' - x' y y'' - x y' y'' + i(x' x'' y + x x'' y' + x x' y'' - y y' y'')$$

$$p_2 = (x + y i)((x' + y' i)(x'' + y'' i))$$

$$p_2 = x x' x'' - x'' y y' - x' y y'' - x y' y'' + i(x' x'' y + x x'' y' + x x' y'' - y y' y'')$$

Coniugazione e modulo.

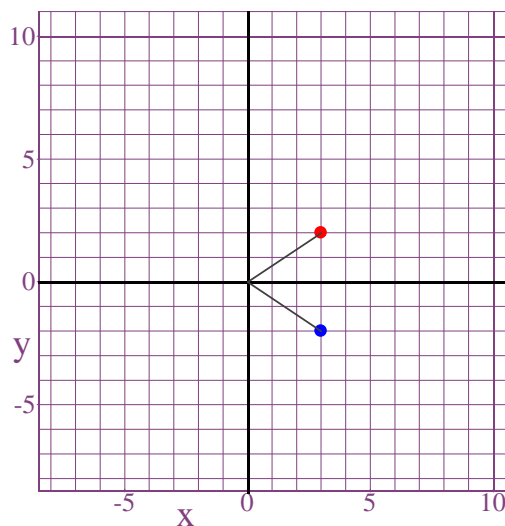
definizione del coniugato di un numero

$$\text{con}(3+2i)$$

$$\text{con}(3+2i) = 3-2i$$

rappresentazione del coniugato con(a) :

$$a = 3+2i$$



proprietà

la coniugazione è un operatore di tipo "switch" (involutorio) :

$$\text{con}(\text{con}[3+2i])$$

$$\text{con}(\text{con}[3+2i]) = 3+2i$$

in generale

$$\text{con}(\text{con}[x + y i])$$

$$\text{con}(\text{con}[x + y i]) = \text{con}(x - i y)$$

$$\text{con}(\text{con}[x + y i]) = x + i y$$

la coniugazione commuta con l'opposizione (opposizione=cambiamento di segno):

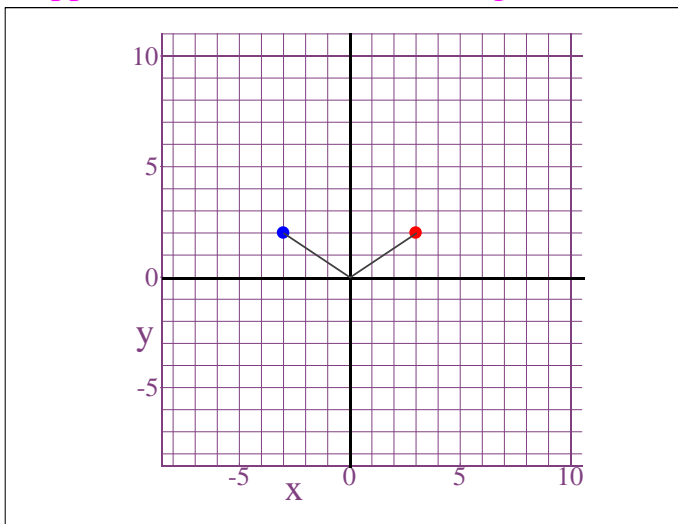
$$\begin{aligned} \operatorname{con}(-[3+2i]) \\ \operatorname{con}(-[3+2i]) &= -3+2i \\ -\operatorname{con}(3+2i) \\ -\operatorname{con}(3+2i) &= -3+2i \end{aligned}$$

in generale

$$\begin{aligned} \operatorname{con}(-[x+yi]) \\ \operatorname{con}(-[x+yi]) &= \operatorname{con}(-x-iy) \\ \operatorname{con}(-[x+yi]) &= -x+iy \\ -\operatorname{con}(x+yi) \\ -\operatorname{con}(x+yi) &= -(x-iy) \\ -\operatorname{con}(x+yi) &= -x+iy \end{aligned}$$

L'opposto del coniugato di un numero complesso z (che, come visto, coincide con il coniugato dell'opposto) viene detto anticoniugato di z .

representazione dell' anticoniugato $-\operatorname{con}(a)$:



la coniugazione è distributiva rispetto all'addizione :

$$\begin{aligned} \operatorname{con}(a+b) \\ \operatorname{con}(a)+\operatorname{con}(b) \end{aligned}$$

in generale

$$\begin{aligned} \operatorname{con}([x+yi]+[x'+y'i]) \\ \operatorname{con}([x+yi]+[x'+y'i]) &= \operatorname{con}(x+x'+iy+iy') \\ \operatorname{con}([x+yi]+[x'+y'i]) &= \operatorname{con}(x+x'+i[y+y']) \\ \operatorname{con}([x+yi]+[x'+y'i]) &= -i(y+y')+x+x' \\ \operatorname{con}([x+yi]+[x'+y'i]) &= x+x'-iy-iy' \\ \operatorname{con}(x+yi)+\operatorname{con}(x'+y'i) \\ \operatorname{con}(x+yi)+\operatorname{con}(x'+y'i) &= (x-iy)+(x'-iy') \\ \operatorname{con}(x+yi)+\operatorname{con}(x'+y'i) &= x+x'-iy-iy' \end{aligned}$$

la coniugazione è distributiva rispetto alla moltiplicazione :

$$\begin{aligned} \operatorname{con}(ab) \\ \operatorname{con}(a)\operatorname{con}(b) \end{aligned}$$

in generale

$$\text{con}(\overline{(x + yi)(x' + y'i)})$$

$$\text{con}(\overline{(x + yi)(x' + y'i)}) = \text{con}(xx' + ix'y + ix'y' - yy')$$

$$\text{con}(\overline{(x + yi)(x' + y'i)}) = \text{con}(xx' + i[x'y + x'y'] - yy')$$

$$\text{con}(\overline{(x + yi)(x' + y'i)}) = \text{con}(xx' - yy' + i[x'y + x'y'])$$

$$\text{con}(\overline{(x + yi)(x' + y'i)}) = -i(x'y + x'y') + xx' - yy'$$

$$\text{con}(\overline{(x + yi)(x' + y'i)}) = xx' - ix'y - ix'y' - yy'$$

$$\text{con}(x + yi)\text{con}(x' + y'i)$$

$$\text{con}(x + yi)\text{con}(x' + y'i) = (x - iy)(x' - iy')$$

$$\text{con}(x + yi)\text{con}(x' + y'i) = xx' - ix'y - ix'y' - yy'$$

il prodotto di un numero complesso per il suo coniugato è reale ...

$$a = 3 + 2i$$

$$a \text{ con}(a) = 13$$

... ed è **non negativo**

$$(x + yi)\text{con}(x + yi)$$

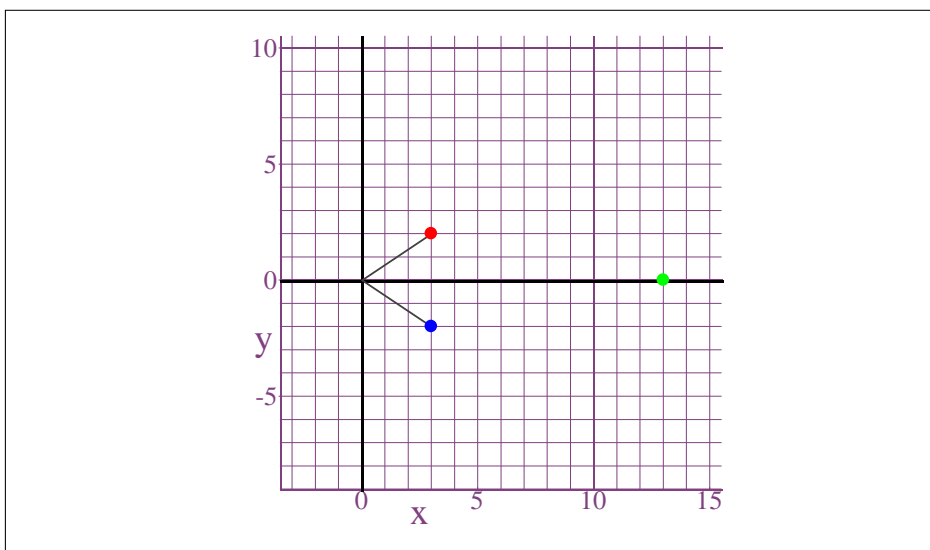
$$(x + yi)\text{con}(x + yi) = (x + yi)(x - iy)$$

$$(x + yi)\text{con}(x + yi) = x^2 + y^2$$

... e quindi si annulla solo quando a è nullo .

rappresentazione del prodotto di a per il suo coniugato $\text{con}(a)$:

$$a = 3 + 2i$$



la rotodilatazione che porta 1 in a porta il coniugato di a sull'asse reale dalla parte positiva (o meglio non negativa) ma l'effetto di dilatazione, se c'è, aumenta la distanza dallo zero. Tale effetto c'è se a dista da 0 più di quanto ne dista 1.

Importante conseguenza :

*un numero complesso a dista 1 dall'origine 0 quando la rotodilatazione che porta 1 in a porta anche $\text{con}(a)$ in 1 (e quindi applicata due volte porta $\text{con}(a)$ in a . In tal caso la rotodilatazione non ha effetto dilatativo ed è detta **rotazione** e il numero a è detto **unitario**. Pertanto un numero $a = x + yi$ è unitario quando **$\text{con}(a)a = 1$** :*

$$(x - y i)(x + y i) = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

modulo e normalizzazione

Un numero complesso a diverso da 0 è esprimibile come multiplo di un numero unitario, detto **versore** di a, $\text{vers}(a)$. Quindi esiste un numero positivo r tale che:

$a = r \text{vers}(a)$. Tale numero r è detto **modulo** del numero complesso a. Esso si indica simbolicamente con la notazione $|a|$. Infatti coincide col valore assoluto di a quando a è un numero reale.

$$a = x + y i$$

$$\text{vers}(a) = \frac{a}{r}$$

$$\text{vers}(a) = \frac{x + i y}{r}$$

$$\text{vers}(a) = \frac{x}{r} + \frac{i y}{r}$$

$$\left(\frac{x}{r} + \frac{i y}{r}\right) \text{con} \left(\frac{x}{r} + \frac{i y}{r}\right) = 1$$

$$\left(\frac{x}{r} + \frac{i y}{r}\right) \left(\frac{x}{r} - \frac{y}{r} i\right) = 1$$

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2} = 1$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

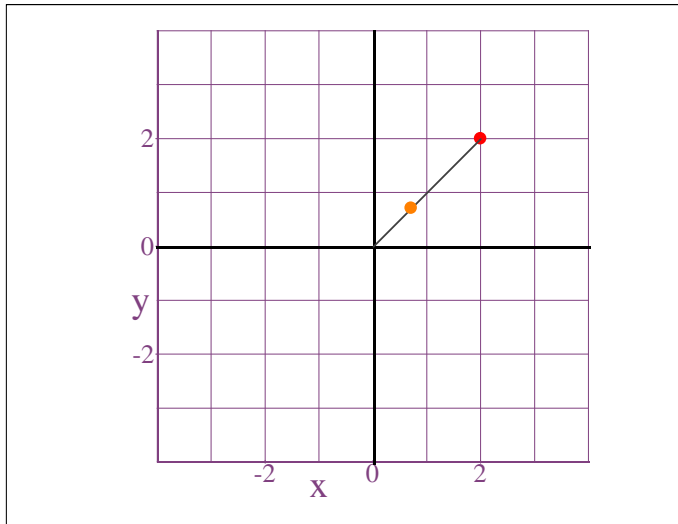
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Il numero (unitario) $\text{vers}(a) = \frac{a}{|a|}$, definito se $a \neq 0$, è detto anche **normalizzato** da a

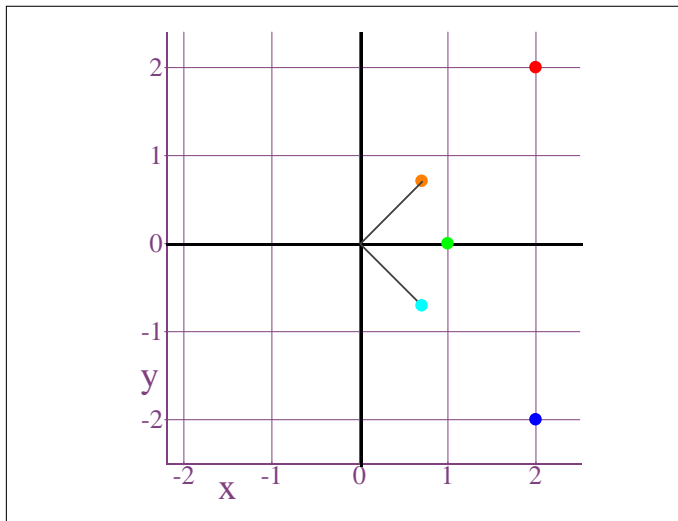
representazione di a e del suo normalizzato $\text{vers}(a) = a / |a|$:

$$a = 2 + 2i$$



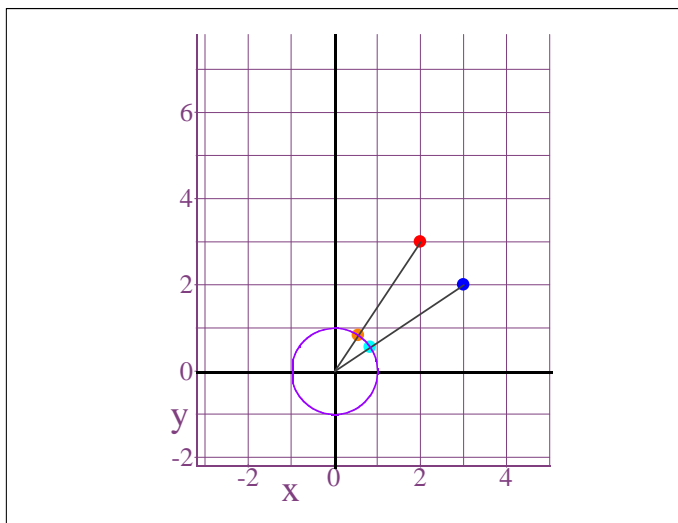
representazione di $a / |a|$ moltiplicato per il proprio coniugato :

$$a = 2 + 2i$$



L'insieme dei numeri normalizzati è detta **circonferenza unitaria** (o **goniometrica**) ; i numeri di tale circonferenza unitaria sono detti (oltre che **unitari**) **goniometrici** :

$$a = 2 + 3i \quad b = 3 + 2i$$



simmetrico di un numero complesso

Il **simmetrico** di un numero complesso $z = x + y i$ è il numero complesso $y + x i$, ossia quello con parte reale e immaginaria scambiate rispetto a quelle di z .

L' **antisimmetrico** di z è l'opposto del simmetrico di z .

Simmetrico e antisimmetrico sono ottenibili da z tramite gli operatori, già introdotti di coniugazione, di ortogonalità e di opposizione.

simmetrico

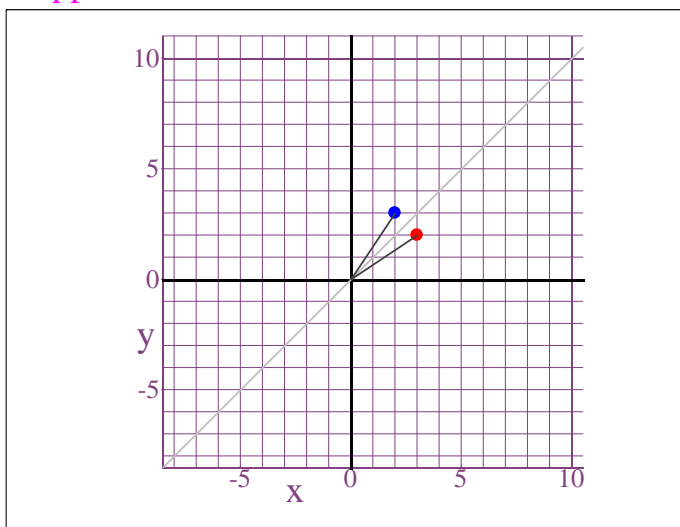
$$\text{con}(x + y i)i$$

$$\text{con}(x + y i)i = (x - i y)i$$

$$\text{con}(x + y i)i = i x + y$$

$$\text{con}(x + y i)i = y + i x$$

rappresentazione del simmetrico di a :



antisimmetrico

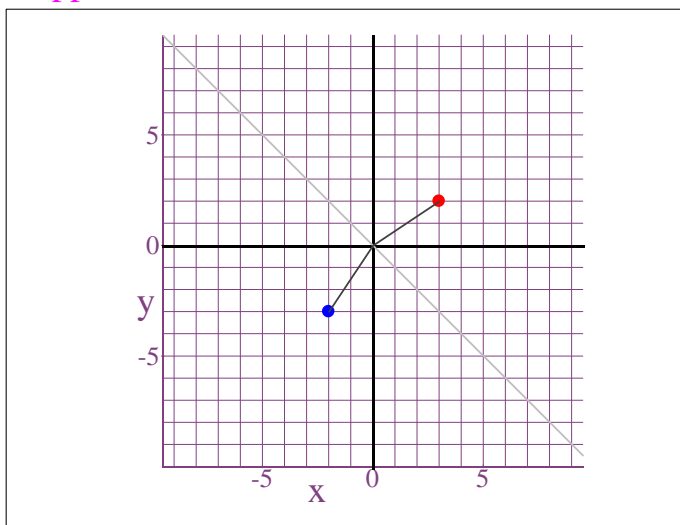
$$\text{con}([\text{con}(x + y i)]i)$$

$$\text{con}([\text{con}(x + y i)]i) = \text{con}(i x - y)$$

$$\text{con}([\text{con}(x + y i)]i) = \text{con}(-y + i x)$$

$$\text{con}([\text{con}(x + y i)]i) = -i x - y$$

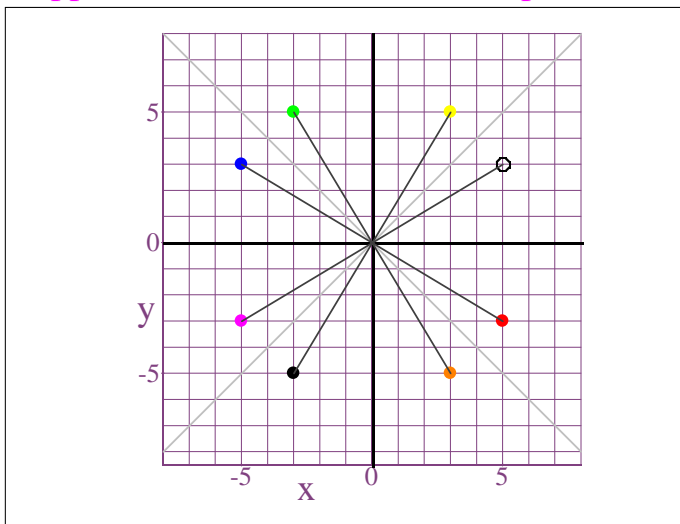
rappresentazione dell' antisimmetrico di a :



L' ottagono associato ad un numero complesso z

Ad un generico numero complesso z restano, per quanto visto, associati i seguenti punti : opposto, coniugato e anticoniugato, ortogonale e antiortogonale, simmetrico e antisimmetrico . Insieme con il numero stesso essi costituiscono un ottagono (in genere non regolare) .

rappresentazione di z e dei sette punti ad esso associati :



*Tutti questi punti hanno lo stesso modulo, Essi hanno in comune la stessa distanza dall'origine degli assi $0 = 0+0i$. Pertanto il modulo di z esprime la **distanza** di z dalla origine degli assi .*

Teorema di Pitagora

La formula che esprime il modulo :

$$|x + y i|$$

$$|x + y i| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|x + y i|^2 = \sqrt{x^2 + y^2}^2$$

$$|x + y i|^2 = x^2 + y^2$$

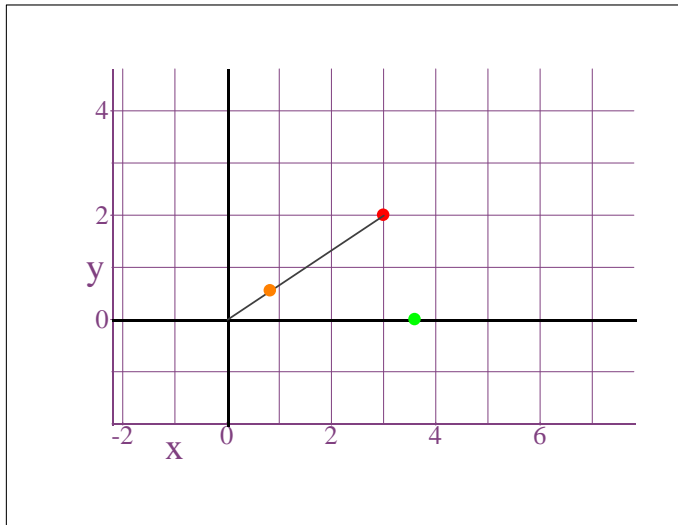
interpretata in termini di cateti ed ipotenusa, esprime il noto teorema di Pitagora sui triangoli rettangoli .

Moltiplicazione, numeri unitari, distanza, angoli.

grafici

rappresentazione di a , di $|a|$ e di $a/|a|$ (normalizzato di a):

$$a = 2 + 3i$$



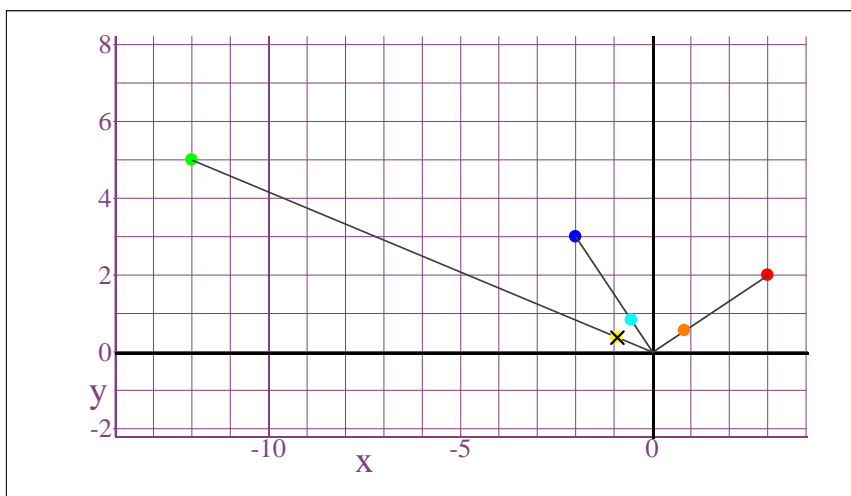
rappresentazione di :

a , b , ab , $\text{vers}(a)$, $\text{vers}(b)$, $\text{vers}(ab)$, $\text{vers}(a) \text{vers}(b)$

(quest' ultimo raffigurato con la crocetta) :

$$a = 3 + 2i$$

$$b = -2 + 3i$$



notiamo come il versore di ab coincide col prodotto del versore di a per il versore di b

infatti :

$$\frac{ab}{|ab|}$$

$$\frac{ab}{|ab|} = \frac{-12 + 5i}{|-12 + 5i|}$$

$$\frac{ab}{|ab|} = \frac{-12 + 5i}{13}$$

$$\frac{a}{|a|} \frac{b}{|b|}$$

$$\frac{a}{|a|} \frac{b}{|b|} = \frac{3+2i}{|3+2i|} \frac{-2+3i}{|-2+3i|}$$

$$\frac{a}{|a|} \frac{b}{|b|} = \frac{1}{13}(3+2i)(-2+3i)$$

$$\frac{a}{|a|} \frac{b}{|b|} = \frac{1}{13}(-12+5i)$$

anzi, basta osservare che il modulo del prodotto coincide col prodotto dei moduli :

$$|a b| = |a| |b|$$

$$|a b|$$

$$|a b| = 13$$

$$|a| |b|$$

$$|a| |b| = 13$$

$$|a b|$$

$$|a b| = |a| |b|$$

in generale :

$$|x + y i| |x' + y' i| = |(x + i y)(x' + i y')|$$

Quindi : per calcolare ab si può scrivere $ab = \frac{a}{|a|} \frac{b}{|b|} |a| |b|$,

cosicchè si calcola prima il prodotto dei due normalizzati (che sono unitari, ossia hanno modulo 1) e poi si moltiplica il risultato per il numero (reale) prodotto del modulo di a per il modulo di b . **Tutto si riduce quindi ad analizzare come agisce geometricamente la moltiplicazione di due numeri unitari, ossia ad analizzare la moltiplicazione sulla circonferenza unitaria.**

Equazione della circonferenza unitaria

in \mathbb{C} assume una forma molto compatta

$$|z| = 1$$

rispetto alle coordinate x, y :

$$z = x + y i$$

$$|z| = 1$$

$$|x + y i| = 1$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Equazione della circonferenza di raggio r centrata nell'origine

in \mathbb{C} assume una forma molto compatta

$$|z| = r$$

rispetto alle coordinate x, y :

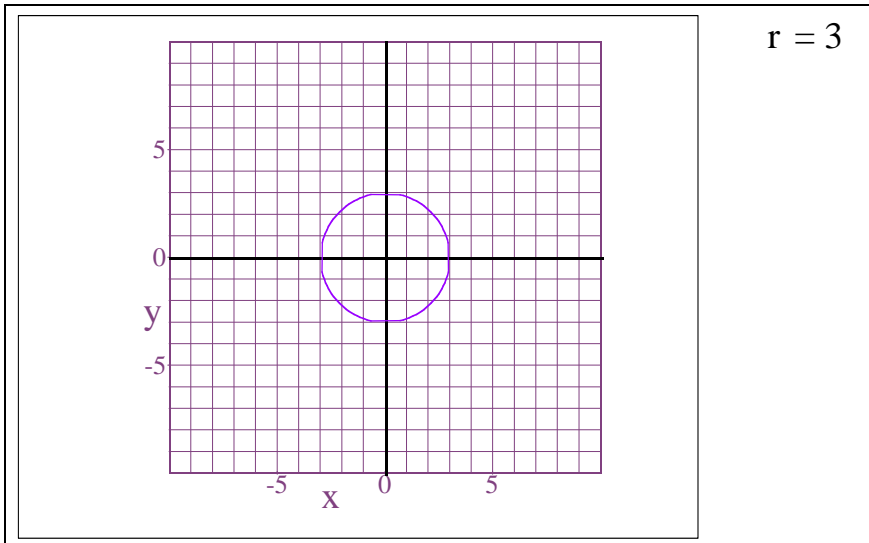
$$z = x + y i$$

$$|z| = r$$

$$|x + y i| = r$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Circonferenza centrata in z e di raggio r

è l'insieme dei numeri z' tali che :

$$|z - z'| = r$$

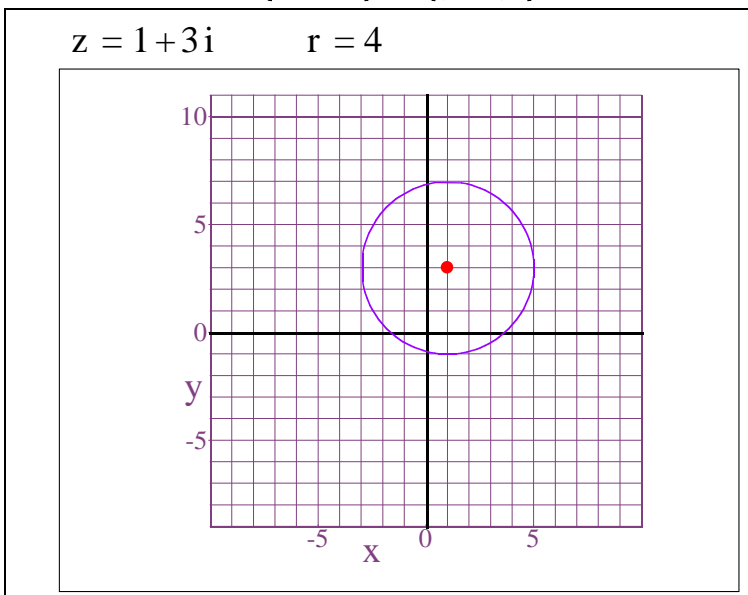
$$|x - x' + i y - i y'| = r$$

$$|x - x' + i(y - y')| = r$$

$$|x - x' + (y - y')i| = r$$

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = r$$

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = r^2$$



Distanza fra due numeri complessi (o punti del piano)

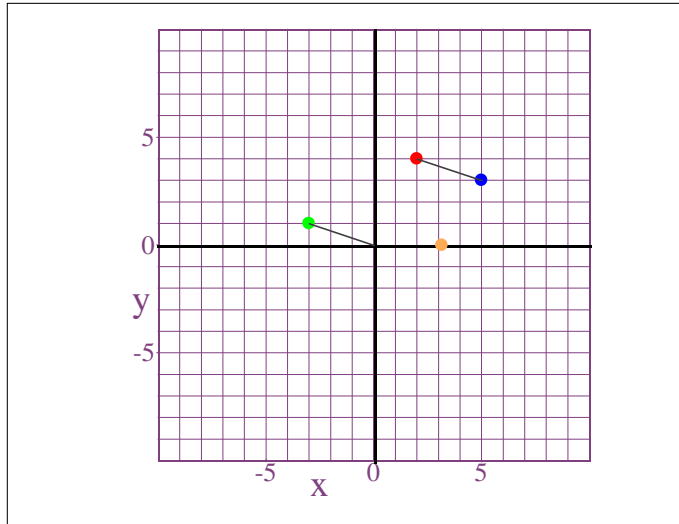
Prendiamo, oltre a $z = x + y i$, anche $z' = x' + y' i$:

$$z' = x' + y' i$$

Si definisce distanza fra z e z' il numero reale (non negativo) :

$$|z - z'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

rappresentazione di z , z' , $z - z'$, $z - z'$:



$$z = 2 + 4i \quad z' = 5 + 3i$$

Forma generale dei numeri unitari

Sia u un numero unitario :

$$u = x + y i$$

$$|u| = 1$$

deduciamo :

$$x^2 + y^2 = 1$$

si hanno le due possibilità seguenti

$$y = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1$$

in tal caso :

$$u = x + y i$$

$$u = 1$$

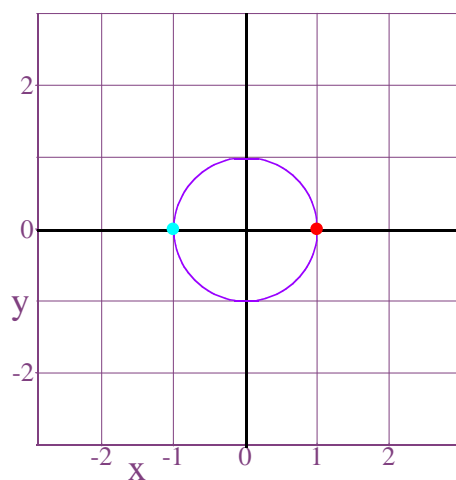
$$x = -1$$

in tal caso :

$$u = x + y i$$

$$u = -1$$

otteniamo quindi i due numeri unitari (reali) opposti 1 e -1 :



$$y \neq 0$$

in questo caso poniamo :

$$t = \frac{x}{y}$$

$$x = t y$$

e otteniamo :

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$(t y)^2 + y^2 = 1$$

$$t^2 y^2 + y^2 = 1$$

$$(t^2 + 1)y^2 = 1$$

$$y^2 = \frac{1}{t^2 + 1}$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{t^2 + 1}}$$

in questo caso :

$$u = x + y i$$

$$u = t y + i y$$

$$u = i \sqrt{\frac{1}{t^2 + 1}} + \sqrt{\frac{1}{t^2 + 1}} t$$

$$y = -\sqrt{\frac{1}{t^2 + 1}}$$

in questo caso :

$$u = x + y i$$

$$u = t y + i y$$

$$u = -i \sqrt{\frac{1}{t^2 + 1}} - \sqrt{\frac{1}{t^2 + 1}} t$$

otteniamo, al variare di t , tutti gli altri punti unitari

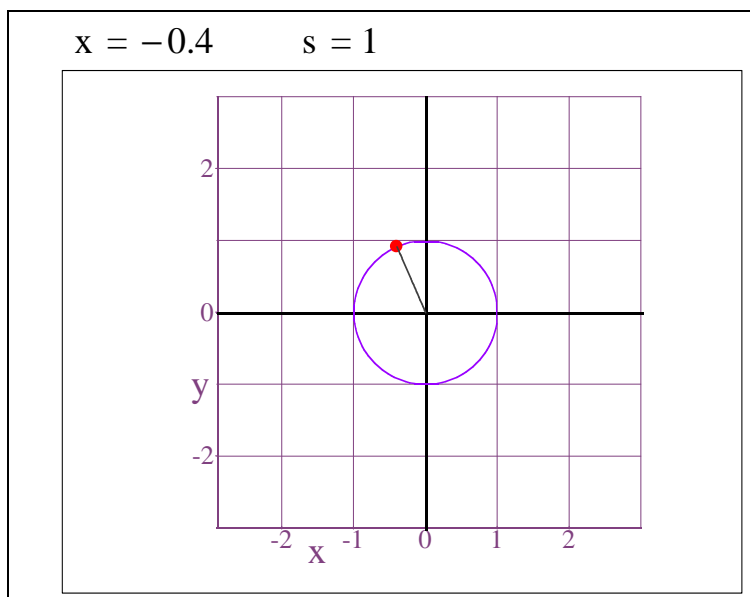
possiamo anche procedere attribuendo ad x tutti i valori fra -1 e 1 e ricavare la y :

$$y = \sqrt{-x^2 + 1}$$

$$y = -\sqrt{-x^2 + 1}$$

animazione al variare di x :

Pertanto, un numero unitario u è definito da un numero x compreso fra -1 e 1 e da un segno s ($+1$ o -1), che se x non coincide con uno degli estremi -1 o 1 , indica il segno dell'ordinata di u :



In altri termini, u è definito dal valore del coseno e dal segno del seno. Quando il coseno è -1 o 1 , la seconda informazione perde valore .

Se u è unitario , possiamo considerarlo come numero complesso che caratterizza l'angolo formato dal semiasse positivo dell'asse delle ascisse e la semiretta Ou (ossia quella che parte dall'origine e passa per u). E' per questa associazione che la circonferenza unitaria è detta goniometrica.

Se $u = x + yi$, chiamiamo x **coseno** di u e chiamiamo y **seno** di u .

In seguito andremo ad associare ad ogni numero unitario u un numero che esprime la lunghezza dell' arco di circonferenza descritto in senso antiorario e compreso fra $1 = 1 + 0i$ e u stesso . Tale numero , indicato, ad esempio, con la lettera greca θ (theta), compreso fra 0 e 2π ($0 \leq \theta < 2\pi$), verrà chiamato **argomento** di u (e anche di ogni numero complesso il cui normalizzato sia u) . Ma, dal momento che tale concetto coinvolge la delicata questione del calcolo della misura della lunghezza di un ente che non è rettilineo (un arco di circonferenza) , tale trattazione richiede attenzione specifica da dedicare a parte .

Indicando con $\arg(z)$ l'argomento del numero complesso non nullo z ,

abbiamo quindi : $\arg(z) = \arg\left(\frac{z}{|z|}\right)$.

Solitamente seno e coseno sono considerati come dipendenti dall' argomento θ (quindi come funzioni di una variabile reale) , e non come semplici funzioni di un numero unitario (per cui si riducono a Re e Im) . Quindi :

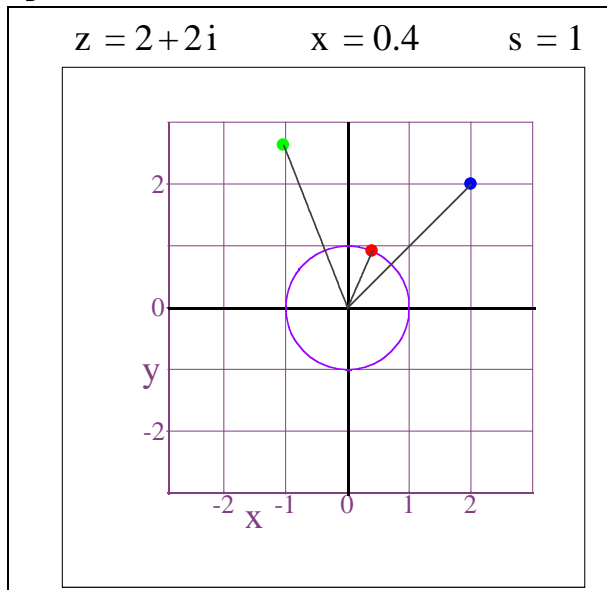
se $z \neq 0$ e $\theta = \arg(z)$, si ha : $\cos(\theta) = \text{Re}\left(\frac{z}{|z|}\right)$ e $\sin(\theta) = \text{Im}\left(\frac{z}{|z|}\right)$.

Pertanto : $\frac{z}{|z|} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, ovvero : $z = |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$.

Moltiplicazione per un numero unitario

Esaminiamo la moltiplicazione di un generico numero z (unitario o non) per un numero unitario, individuando tale secondo numero tramite ascissa (fra - 1 e 1) e segno $s = + 1, - 1$) :

punti u (unitario) , z , uz :



Notiamo che :

il modulo di z resta invariato dopo la moltiplicazione per in numero unitario u . Infatti :

$$|u| = 1$$

$$|z u|$$

$$|z u| = |u| |z|$$

$$|z u| = |z|$$

se z è nullo , anche $z u$ è nullo :

$$z = 0$$

$$z u$$

$$z u = 0$$

la distanza fra due punti z e z' coincide con quella fra i corrispondenti ottenuti tramite moltiplicazione per u :

$$|z u - z' u|$$

$$|z u - z' u| = |(z - z') u|$$

$$|z u - z' u| = |z - z'| |u|$$

$$|z u - z' u| = |z - z'|$$

pertanto la trasformazione che porta z in $z u$ lascia fissa l'origine 0 e conserva le distanze, ossia viene naturale chiamarla **rotazione** intorno all'origine .

Angoli

*Definiamo **angolo orientato** una rotazione intorno all'origine .*

Il "ruotato" di 1 è u stesso .

Esistono tante rotazioni quanti sono i punti unitari, ossia ad ogni punto unitario ne corrisponde una, e a due punti unitari distinti corrispondono rotazioni distinte .

a i e $-i$ corrispondono rispettivamente le già viste ortogonalità e antiortogonalità .Esse corrispondono ad un angolo (non orientato) retto e possono essere denominate angolo (orientato) retto antiorario (ortogonalità) ed angolo (orientato) retto antiorario (antiortogonalità) .

ad $u = 1$ corrisponde la rotazione nulla (angolo nullo), ossia quella che non sposta nessun z .

ad $u = -1$ corrisponde la già vista opposizione, che possiamo vedere come rotazione di un intero semipiano (angolo piatto).

Si possono ritrovare nell'ottagono associato a u gli usuali concetti di angolo complementare (associato al simmetrico di u), supplementare (associato allo antisimmetrico di u), esplementare (associato al coniugato di u) , ognuno di essi riferito all'angolo di partenza (associato ad u) .

In definitiva, nel contesto in cui ci troviamo, è conveniente non dare per preconosciuto il concetto di angolo (non orientato) , bensì , dopo aver definito (come abbiamo fatto) il concetto di angolo orientato, definire un angolo non orientato come un insieme di due angoli orientati associati a numeri coniugati (esplementari) .

Misurazione e addizione di angoli. Formula di De Moivre.

Composizione di rotazioni

Abbiamo visto che ogni numero unitario u (numero della circonferenza unitaria, o goniometrica) è associato ad una rotazione, che è esattamente lo operatore che porta ogni z in uz (o zu , essendo commutativa la moltiplicazione fra numeri complessi come fra numeri reali). Se v è un altro numero unitario, il prodotto uv , come visto, è anch'esso unitario e corrisponde alla rotazione che porta il generico z in zuv , risultato della composizione della rotazione che porta z in zu con quella che porta zu in zuv .

u

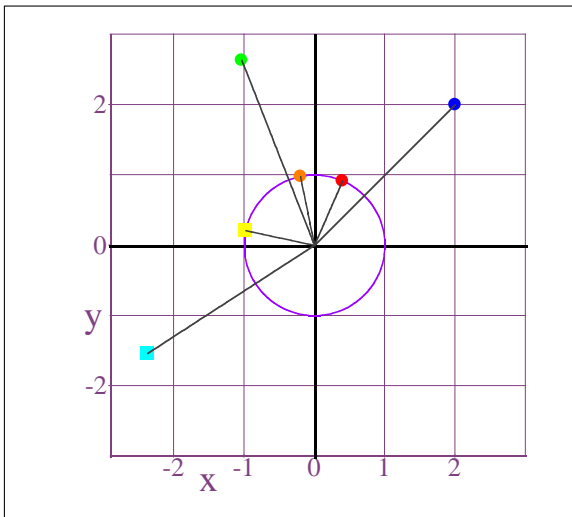
$$x = 0.4 \quad s = 1$$

v

$$x' = -0.2 \quad s' = 1$$

z

$$z = 2 + 2i$$



Quindi è intuitivo il fatto che il prodotto uv , in quanto associato alla rotazione composta di quelle associate a u e a v , abbia come argomento $\theta + \phi$. Questo fatto andrebbe dimostrato rigorosamente, ma dipende da una definizione rigorosa dell'argomento di un numero unitario come misura dell'associato arco di circonferenza unitaria. La costruzione relativa a ciò richiede, come dicevamo, una trattazione a parte, che può essere tralasciata se si accetta intuitivamente il passaggio da rotazioni (angoli) a numeri esprimenti le loro misure.

misure angolari

Il numero complesso più vicino a 1 fra i numeri unitari $u=x+yi$ con $x,y>0$ e tali che $u^{90} = i$ (la cui esistenza, pur intuitiva, andrebbe dimostrata rigorosamente) corrisponde alla novantesima parte dell'angolo retto antiorario. Chiamiamo tale rotazione "grado antiorario" e indichiamo con u_{90} il numero complesso unitario associato (ossia il su scritto u). In tal modo con le 360 potenze di u_{90} si divide la circonferenza unitaria partendo da 1 fino a ritornare a 1 (ciclotomia, ossia : suddivisione del cerchio) . Ognuno dei punti trovati u_{90}^k individua un angolo, e diremo che la sua misura in gradi (sia dell'angolo, sia dello stesso numero unitario) è proprio l'esponente k , per cui all' angolo associato al prodotto $(u_{90}^k)(u_{90}^h) = u_{90}^{k+h}$ viene attribuita la misura $k + h$. Quindi , indicata la funzione di misura in gradi con $mgrad$, si ha $mgrad(u v) = mgrad(u) + mgrad(v)$. Esprimiamo ciò dicendo che $mgrad$ porta prodotti in somme. Tale proprietà è anche detta **logaritmicità** , in quanto è tipica delle funzioni logaritmiche.

La misura in gradi, definita per i 360 punti unitari potenze di u_{90} , può essere estesa a tutti gli altri punti della circonferenza unitaria, con un procedimento di infittimento della divisione della circonferenza unitaria, analogo a quello che si segue per la misura di un segmento mediante una unità di misura. La proprietà di portare prodotti in somme viene conservata. Ai fini di tale estensione si rivela più utile ricorrere, invece della divisione in 90 dell'angolo retto, il processo di suddivisione in 2, 4, 8, 16, 32, 64, ecc. ossia la bisezione iterata, in quanto è disponibile una semplice formula per la bisezione, ossia per esprimere, dato un numero unitario u tramite il suo coseno (la x cui ci siamo già più volte riferiti), il coseno del numero u' il cui quadrato è il numero dato (u' corrisponde, come visto, alla divisione in due parti uguali dell'angolo associato ad u).

Come tutte le misure, si può cambiare scala con una proporzionalità diretta, attribuendo il valore desiderato (purché positivo) ad un fissato elemento. Se si effettua tale cambiamento sulla misura in gradi $mgrad$ e si definisce la nuova misura (proporzionale) in modo che valga $\pi/4$ su i (ovvero sull'angolo retto), si ottiene la misura degli angoli tramite archi di circonferenza unitaria. Dal momento che l'angolo di misura 1, intale misura, è detto **radiante** , tale misura è detta misura in radianti (mrad). mrad fornisce il valore della funzione arg (argomento di un numero complesso) cui abbiamo già accennato.

Abbiamo quindi tre operazioni che svolgono in parallelo le stesse funzioni : la moltiplicazione su numeri complessi unitari (sulla circonferenza unitaria o goniometrica), la composizione di rotazioni (sugli angoli), l'addizione sulle misure (in gradi o radianti o, per mezzo di proporzionalità diretta, in altre unità).

Formula di De Moivre e radici nel campo complesso

Siano u e v due numeri unitari e θ e ϕ i loro rispettivi argomenti :

$$u = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

$$v = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$$

dal momento che a uv corrisponde l'argomento $\theta + \phi$, possiamo scrivere :

$$u v = \cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)$$

e siccome il prodotto di due numeri complessi non nulli z e w (di argomenti rispettivamente θ e ϕ) si può esprimere tramite i loro normalizzati come $|z| |w| \frac{z}{|z|} \frac{w}{|w|}$ (e tali normalizzati hanno lo stesso argomento dei corrispondenti non normalizzati), abbiamo :

$$z w = |z| |w| \left(\cos[\theta + \phi] + i \sin[\theta + \phi] \right)$$

Questa formula va sotto il nome di formula di DeMoivre

Un'importante conseguenza è che, per un numero complesso non nullo z avente argomento θ , e per ogni numero naturale, si ha :

$$z^n = |z|^n \left(\cos[n \theta] + i \sin[n \theta] \right)$$

Da quest'ultima formula discende che una radice n-sima dell'unità (ossia di 1), è :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

e quindi sono radici n-sime dell'unità anche i numeri unitari :

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

per ogni $k = 0, \dots, n - 1$ (per k da n in su si ritrovano gli stessi numeri unitari)

per $k = 0$ si ritrova lo stesso 1 ; per $k = 1$ si ha la radice n-sima su scritta, detta radice n-sima non reale principale dell'unità .

E, per finire , se z è un numero complesso non nullo di argomento θ , le sue radici n-sime sono date dalla formula :

$$z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left[\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right] + i \sin\left[\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right] \right)$$

per ogni $k = 0, \dots, n - 1$ (per k da n in su si ritrovano gli stessi numeri unitari)

per $k = 0$ si ritrova la cosiddetta radice n-sima principale di z .

Pertanto le radici n-sime di z si trovano dalla radice principale moltiplicata per le radici n-sime dell'unità .