SCHEMA RIASSUNTIVO SU NUMERI COMPLESSI E CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Introduzione nel piano numerico reale (insieme di coppie di numeri reali, visualizzabili anche come vettori) delle due operazioni :

di addizione : (a,b) + (a',b') := (a + a',b + b')

(regola del parallelogramma, regola della concatenazione)

di moltiplicazione "numero per punto" (o "scalare per vettore") : k(a,b) := (ka,kb)

(allungamenti o accorciamento di un vettore, cambiamento di verso)

Definizione dell'unità immaginaria: i := (0,1) e del "punto unità reale" 1_ := (1,0)

Identificazione dei simboli 1 e 1_ e considerazione dei punti (a,b) come "numeri complessi" : (a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a 1_ + b i = a + b i

funzione "parte reale" : Re(a + bi) = a

funzione "parte immaginaria" : Im(a + bi) = b

il piano (insieme dei numeri complessi) viene indicato con C

a - bi è definito "coniugato" di a + bi

definizione della funzione con : con(a + bi) := a - bi

- b + ai è definito (per motivazione grafica) "ortogonale antiorario (o sinistro)" di a + bi

definizione della funzione ort : ort(a + bi) := - b + ai

il coniugato e l'ortogonale avranno un ruolo importante nello studio "geometrico" di C

Introduzione di una operazione di moltiplicazione seguendo le regole formali del prodotto di binomi : (a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab' + a'bi + bb'i^2

affinché l'operazione dia risultati interni a C bisogna che i^2 sia un numero complesso

l'operazione di moltiplicazione dipende dai due numeri m ed n tali che i^2 = m + ni

esplorazione di come opera la moltiplicazione con varie scelte di m ed n

con m = - 1 e n = 0 (e solo con tali scelte) si ha che z i coincide con ort(z) (e ciò accade per ogni numero complesso z = x + yi)

si decide di effettuare la scelta suddetta, per cui : i^2 = - 1 + 0i = - 1

Esplorazione della moltiplicazione in C con la scelta effettuata per i^2 (ossia - 1)

moltiplicare z per i significa ortogonalizzare z (e ciò era alla base della scelta i^2=-1)

preso un z non nullo, moltiplicare z' per z permette di ottenere un numero z'' = z'z tale che l'angolo fra le semirette 0z' e 0z'' (indicato come angolo ia z' 0 z'') sia lo stesso formato fra le semirette 01 (semiasse positivo delle ascisse, ovvero semiasse reale positivo) e 0z (angolo 1 0 z)

si ha quindi un criterio per ruotare l'angolo fra 01 e 0z in modo che il suo primo lato 01 diventi (per effetto di tale rotazione) una qualunque altra semiretta 0z'

tale criterio è : moltiplicare z' per z e prendere la semiretta 0(z'z) come secondo lato dell'angolo partente da 0z'

la semiretta 0con(z) (partente da 0 e passante per il coniugato di z) viene portata nel semiasse reale positivo

infatti z con(z) = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 è reale e positivo

quindi, come ci si aspetta graficamente, l'angolo con(z) 0 1 coincide con l'angolo 1 0 z

la moltiplicazione per z porta con(z) in z con(z) (reale positivo), porta anche 1 in z1 = z .

la moltiplicazione per z , effettuata due volte (quindi la moltiplicazione per z^2) porta con(z) sulla semiretta 0z , ma in genere non in z stesso . Quindi moltiplicare per z ruota le semirette, ma in genere modifica le "distanze" dall'origine 0 se però $x^2 + y^2 = z\ con(z) = 1$, allora la moltiplicazione per z porta con(z) in 1 e 1 in z, quindi la moltiplicazione per z^2 porta con(z) in z .

Un numero z tale che z con(z) = 1 è detto "unitario" . La moltiplicazione per un tale z non modifica le "distanze" da 0

L'insieme dei numeri complessi unitari è detto "circonferenza unitaria (o goniometrica)"

Ogni numero complesso z non nullo la un multiplo (sottomultiplo) unitario z*

$$z^* = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{z}{\sqrt{z\ con(z)}} \qquad \text{(z* è detto "unità" o "versore" di z)}$$

z* viene anche indicato con uno dei simboli ver(z) o vers(z) ("versore" di z)

quindi $z = \sqrt{x^2 + y^2}\ z^*$. ($\sqrt{x^2 + y^2}$ è detto "modulo" di z, in simbolo : $|z|$)

per convenzione diamo valore nullo al modulo di 0 ($|0| := 0$)

$z = |z|\ z^*$ (scomposizione "in modulo e unità (o versore)" di $z \neq 0$)

Il prodotto di due numeri complessi z z' ha per modulo il prodotto dei moduli dei fattori : $|z\ z'| = |z|\ |z'|$ e per versore il prodotto dei versori dei fattori : ver(z z') = ver(z) ver(z') (oppure, con l'altra notazione : (zz')* = z* z'*)

In particolare segue che il prodotto di numeri unitari è unitario, ossia il prodotto di numeri della circonferenza unitaria resta nella circonferenza unitaria

Quindi ogni numero complesso unitario u, che definisce l'angolo α = 1 0 u, permette di ruotare qualunque numero unitario u' (compreso il caso u' = u) dello angolo α , considerando come ruotato di u' il numero u'u . Tale ultimo numero è anche il ruotato di u con l'angolo β = 1 0 u'. L'angolo γ = 1 0 uu' è detto "somma" degli angoli α e β . Quindi : 1 0 uu' = 1 0 u + 1 0 u' (ossia : $\gamma = \alpha + \beta$)

La circonferenza unitaria è detta goniometrica (ossia "misuratrice di angoli") in quanto l'angolo associato ad un qualunque numero complesso non nullo z è lo stesso associato a z* : 1 0 z = 1 0 z*

quindi ogni angolo avente come primo lato la semiretta 0 1 è ottenibile tramite un numero unitario

Inoltre, se u e u' sono unitari , la rotazione che porta u in u' è l'operazione di moltiplicazione per u' con(u) (che è anch'esso unitario) , infatti (u' con(u)) u = u'

quindi sono uguali gli angoli u 0 u' e 1 0 u'con(u) , nel senso che la stessa operazione di moltiplicazione per il numero u'con(u) porta sia u in u' , sia 1 in u'con(u) . Ciò permette di riportare il primo lato di ogni angolo sul semiasse 0 1 . Questo trasporto di angoli è analogo alla traslazione che porta un qualunque vettore applicato in un generico punto ad avere il suo punto di applicazione nell'origine 0

è per questo motivo che il semiasse 0 1 è detto "origine" degli angoli e il punto 1 è detto origine della circonferenza goniometrica.

Ad ogni angolo 1 0 z è possibile associare una misura numerica (un numero reale) tramite la lunghezza dell'arco che connette 1 a z* . Ciò si effettua con le funzioni exp e ln.