Schema riassuntivo sulle funzioni esponenziali

1) Una funzione esponenziale ha la seguente forma:

$$y = f(x) = a^x \quad \text{(il numero a è detto “base” di f)}$$

a) quando x=0, si ha $y = f(0) = a^0 = 1$, quindi la funzione f passa per il punto: $(0 , f(0)) = (0 , 1)$

b) quando x=1, si ha $y = f(1) = a^1 = a$, quindi la funzione f passa per il punto: $(1 , f(1)) = (1 , a)$

2) Per essere definita, una funzione esponenziale deve avere la base a positiva, ossia $a>0$. Infatti se $a=0$ non sono definibili tutti gli $f(x)$ con x negativi, ad esempio $f(-1) = a^{-1} = 1/a = 1/0$ (che, come noto, non esiste, altrimenti la sua esistenza comporterebbe che $0 = 1$). Se $a<0$, allora non sono definibili tutti gli $f(x)$ con x pari a frazioni di denominatore pari, ad esempio $a^{1/2} = \sqrt{a}$ che non esiste se a è negativo (in quanto nessun numero elevato al quadrato può dare un risultato negativo).

3) Se $a>1$, allora f è crescente. Se $a=1$, allora la funzione f è costante (e si ha $f(x)=1$, per ogni x), se $0<a<1$ allora la funzione f è decrescente. Infatti le funzioni a^x e $(1/a)^x = a^{-x}$ sono simmetriche rispetto all'asse delle ordinate, in quanto i due punti (x , a^x) e $(-x , (1/a)^{-x}) = (-x , a^x)$ stanno rispettivamente uno sulla prima funzione e l'altro sulla seconda funzione ed hanno ascisse opposte e uguale ordinata.

4) La funzione $f(x) = a^x$ ha la seguente proprietà fondamentale:

$$f(x+x') = f(x) \cdot f(x') , \quad \text{ovvero:} \quad a^{x+x'} = a^x \cdot a^{x'}$$

cioè porta somme in prodotti, e quindi associa ad ascisse che stanno in progressione aritmetica ordinate che stanno in progressione geometrica. E' infatti dalla precedente proprietà fondamentale che derivano tutte le altre: $f(0)=1$, $f(-x)=1/f(x)$, $f(n)=f(1)^n$, $f(1)=f(1/n)^n$ (notare che dal fatto che $a = f(1) = f(1/2)^2$ segue che a non è negativo), $f(1)^m =f(m)=f(m/n)^n$ (ossia: f associa al numero razionale m/n la radice n-sima della potenza m-sima della base (il che comporta, in particolare, che se la base $a = f(1)$ fosse nulla, la funzione f sarebbe sempre nulla su tutti i numeri razionali).

5) Dal fatto che una funzione f che porta somme in prodotti è individuata univocamente dalla scelta della sua base $a = f(1)$, ossia dal valore che assume in corrispondenza dell'unità, seguono anche le seguenti proprietà:

$$f(x x') = f(x)^{x'} \qquad \text{ovvero:} \quad a^{xx'} = (a^x)^{x'}$$

se f e g sono due funzioni esponenziali, si ha: $f(x)\, g(x) = (f(1)\, g(1))^x$

ovvero: $a^x b^x = (a b)^x$ (dove a e b sono le basi rispettive di f e di g).

6) La funzione esponenziale in base a si indica col simbolo $\exp_a$. Con questa notazione le precedenti proprietà diventano: $\exp_a(x+x') = \exp_a(x) \exp_a(x')$, $\exp_a(0)=1$, $\exp_a(1)=a$, $\exp_a(-x)=1/\exp_a(x)$, $\exp_a(xx')=\exp_a(x)^{x'}$, $\exp_a(x) \exp_b(x)=\exp_{ab}(x)$.