Pubblicazione trimestrale
Spedizione in abbonamento postale
GRUPPO IV 70%
Serie VI
Volume 65

3

Luglio - Settembre
1989

Periodico di matematiche

organo della

mathesis

società italiana di scienze matematiche e fisiche

direttore:
bruno rizzi

condirettore:
francesco speranza

segretario di redazione
luigi cerritelli

tipografia editrice
raffaello luciani
roma

Gaetano Speranza

Numeri complessi e trasformazioni geometriche

La teoria dei numeri complessi costituisce uno degli argomenti della matematica elementare fra i più interdisciplinari sia nel quadro della scienza in generale che dello specifico discorso matematico.

Solitamente tale argomento viene affrontato nell'istruzione scolastica negli ultimi anni di corso e sovente in modo abbastanza marginale, usualmente in relazione a quelle nozioni indispensabili per l'elettrotecnica.

Eppure le vaste (e addirittura a volte insospettate a prima vista) interconnessioni fra argomenti della matematica, in cui i numeri complessi assumono una funzione algebrizzante e compattificano i risultati rendendo più agevole la sintesi, sembrano essere motivo di notevole stimolo formativo e si pongono fra i cardini di quel discorso sulla modellizzazione e sul metodo matematico della riduzione dei problemi ad altri più affrontabili, che sempre più incalzante e calzante diventa nei programmi scolastici finalizzati all'incremento di capacità progettuali.

Le trattazioni usuali della teoria in specie partono da considerazioni puramente algebriche (non completezza algebrica del campo dei numeri reali) e solo in un secondo momento interagiscono con una visione geometrica. Di solito tale interazione richiede l'uso di concetti prerequisiti di geometria elementare (angoli, teorema di Pitagora, ecc.); pertanto si tratta di un accostamento di due teorie poste su uno stesso piano, fra cui quella geometrica è conoscenza presupposta. Ciò essenzialmente costituisce la causa di un ritardo nell'introduzione di tale sistema numerico.

Nel presente lavoro si espongono le linee teoriche di uno sviluppo del tutto indipendente da precedenti trattazioni di geometria, facendo attenzione alla naturalezza delle definizioni sulla base di una visualizzazione del piano complesso mediante l'uso di un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali, inteso come supporto semantico alla sintassi dei numeri complessi (il metodo delle coordinate, intuitivamente utilizzato, rientra nel programma di scuola dell'obbligo).

Si realizza quanto detto operando una convoluzione fra il discorso operazionale (somma, moltiplicazione per scalari, con relativa visualizzazione vettoriale; il che permette comunione di interessi con parte del programma di fisica) e trasformazioni geometriche elementari (prendendo spunto da un sottoinsieme di esse particolarmente facile, i cui elementi sono qui denominati simmetrie fondamentali.

Risultano pertanto prerequisiti soltanto i metodi di risoluzione di equazioni e sistemi lineari e di equazioni di secondo grado.

In questa sede si svilupperà il discorso sulle isometrie, ma prendendo spunto da quanto fatto si innestano su tale percorso la goniometria, la teoria dei gruppi e delle matrici, lo studio di luoghi geometrici tramite trasformazioni nel piano.

L'esposizione, che è volutamente improntata all'essenzialità e al rigore formale, si articola in definizioni (simbolo DEF), teoremi (simbolo THE) e esercizi (simbolo EXR), questi ultimi inseriti per rendere il cammino più interattivo e stimolante per il lettore.

1) NUMERI COMPLESSI

DEF. 1) - Si definisce numero complesso una coppia di numeri reali, quindi un elemento di $R \times R$. L'insieme dei numeri complessi si indica col simbolo C. Pertanto $C := R \times R$ ha una rappresentazione grafica in un piano cartesiano, o rappresentando ogni numero complesso come un punto di tale piano o come vettore (raggio vettore) congiungente l'origine del piano cartesiano col punto appena detto. Ambedue tali rappresentazioni sono intuitive e feconde. Se $z = (a, b)$, a è detta parte reale, mentre b parte immaginaria; in simboli: $Re(z) := a$, $Im(z) := b$. Sia Re che Im sono funzioni $C \to R$.

DEF. 2) - Chiamiamo copia in C del numero $a \in R$ il numero complesso $(a, 0)$. Poniamo: $a_- := (a, 0)$. L'insieme di tutte le coppie di tale tipo, cioè $R \times \{0\}$, prende il nome di asse reale. Corrispondentemente, l'insieme $\{0\} \times R$ prende il nome di asse immaginario e i suoi elementi si chiamano numeri immaginari puri. Definiamo l'addizione in C ponendo $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$. Definiamo anche la moltiplicazione fra un numero reale e un numero complesso ponendo, per $a, b, c \in R$: $a \cdot (b, c) := (a \cdot b, a \cdot c)$. Si definisce anche la somma di due sottoinsiemi di C, $A, B \subseteq C$, ponendo, $A + B := \{z + w: z \in A, w \in B\}$, come il prodotto di un insieme $K \subseteq R$ per un insieme $A \subseteq C$, ponendo: $K \cdot A = \{x \cdot z: x \in K, z \in A\}$. Inoltre chiamiamo opposto di $c \in C$ il numero complesso $-z := (-1) \cdot z$, e inoltre opposto di $A \subseteq C$ l'insieme $-A := \{-z: z \in A\}$. Poniamo infine $x - w := x + (-w)$, come d'uso.

EXR. 1) - Rappresentare su un piano cartesiano la somma di due numeri complessi ottenendola col noto metodo della composizione di vettori con parallelogramma. Rappresentare poi il prodotto di un numero reale per un numero complesso ottenendolo come multiplo o sottomultiplo di un vettore.

DEF. 3) - Si definisce retta individuata da $z \in C$ l'insieme $ret(z) := \{a \cdot z: a \in R\}$ dei multipli di z. Invece si chiama semiretta individuata da z l'insieme $sem(z) := \{a \cdot z: a \in [0, +\infty[\}$ (rappresentare tali insiemi).

DEF. 4) - Si definisce unità immaginaria il numero complesso $i := (0, 1)$. Quindi possiamo scrivere ogni numero complesso (a, b) nella forma:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = a \cdot 1_- + b \cdot i.$$

CONVENZIONE: Per semplificare la simbologia conveniamo di tralasciare il punto di moltiplicazione (come si fa per i numeri reali) e di sottointendere, nella formula precedente, il fattore $(1, 0)$, cioè 1_-.

Pertanto scriviamo: $(a, b) = a + bi$.

EXR. 2) - Dimostrare che, per ogni $a, b \in R$, si ha: $(ab)\, i = a\,(bi)$.

PROPRIETA': Consideriamo l'operazione di moltiplicazione fra numeri reali e numeri complessi $\mu := \{(a, b + ci) \rightarrow ab + aci: a, b, c \in R\}: R \times C \rightarrow C$.

Fissato $a \in R$, si ottiene la funzione $\mu\,(a, -) := \{z \rightarrow \mu\,(a, z); z \in C\}: C \rightarrow C$, che trasforma ogni numero complesso z, rappresentato come un certo raggio vettore, nel numero complesso az, rappresentato dal vettore multiplo secondo a del raggio vettore suddetto. In corrispondenza, possiamo definire in modo analogo, fissato $z \in C$, la funzione $\mu\,(-, z) := \{a \rightarrow \mu\,(a, z): a \in R\}: R \rightarrow C$, che associa ad ogni numero reale a il numero complesso az. Tale funzione ci conduce a considerare un'altra funzione simile, però definita su numeri complessi, che è $m\,(z) := \{(a, 0) \rightarrow az: a \in R\}: R \times \{0\} \rightarrow C$. Tale funzione differisce algebricamente dalla precedente soltanto per la sostituzione di $a \in R$ con $a_{-} = (a, 0) \in C$, ma ha una interpretazione geometrica, dal momento che nella rappresentazione associa ad ogni raggio vettore dell'asse reale un raggio vettore multiplo di z, ossia elemento di $ret\,(z)$. Osserviamo che $m\,(z)$ trasforma $sem\,(1_{-})$, ossia il semiasse positivo dell'asse reale, in $sem\,(z)$ e trasforma $sem\,(-1_{-})$, ossia il semiasse negativo dell'asse reale, in $sem\,(-z) = -sem\,(z)$. Ciò conduce, nel caso in cui $z = i$, a considerare $m\,(i)$ come una rotazione che porta a_{-} in ai e $-a_{-}$ in $-ai$. Risulta quindi naturale estendere tale funzione anche fuori dell'asse reale. Il primo passo consiste nel definire $m^*\,(i) = m\,(i)\; U\, \{ai \rightarrow -a_{-}: a \in R\}$ tenendo presente l'idea della rotazione. Pertanto si ha: $dom\,(m^*\,(i)) = (R \times \{0\})\; U\; (\{0\} \times R)$. Ciò comporta che $m^*\,(i))\;(i) = -1_{-}$.

E' importante tener presente per il seguito che la funzione $m^*\,(i)$ è stata ottenuta dalla funzione $\mu\,(-, i)$ di moltiplicazione per i.

DEF. 5) - Si definisce moltiplicazione in C una operazione $\tau: C \times C \rightarrow C$ che:

1) sia associativa (ossia, per ogni $u, z, w \in C$: $u\tau(z\tau w) = (u\tau z)\tau w$);

2) sia commutativa (cioè tale che, per ogni $u, z \in C$: $u\tau z = z\tau u$);

3) sia distributiva rispetto a $+: C \times C \to C$ (cioè tale che si abbia, per ogni $u, z, w \in C$: $u\tau(z + w) = u\tau z + u\tau w$);

4) sia tale che, per ogni $z \in C$, $\tau(-, z): C \to C$ estenda $m(z)$ (cioè $\tau(a_-, z) = (m(z))(a_-) = az$);

5) sia tale che $\tau(-, i)$ coincida con $m^*(i)$ sull'asse immaginario (cioè $\tau(ai, i) = (m^*(i))(ai) = -a_-$).

THE. 1) - Esiste una unica moltiplicazione τ in C, ottenuta dalla formula:

$$*) \qquad (a + bi)\tau(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Dim.: Proviamo innanzitutto che una operazione τ che soddisfi alle condizioni richieste deve necessariamente soddisfare l'eguaglianza *) precedente. Sia, quindi, τ una moltiplicazione in C ai sensi di DEF. 5; dalle condizioni 4) e 2) ricaviamo:

a) $\quad a_-\tau b_- = \tau(a_-, b_-) = a(b_-) = (ab)_-$;

b) $\quad a_-\tau bi = bi\tau a_- = \tau(a_-, bi) = a(bi) = (ab)i$.

Inoltre da 2) e 5) deduciamo:

c) $\quad i\tau ai = ai\tau i = \tau(ai, i) = -a_-$.

Da 4), 1), c) e a) deduciamo:

d) $\quad ai\tau bi = (a_-\tau i)\tau bi = a_-\tau(i\tau bi) = a_-\tau -b_- = a_-\tau (-b)_- = (-ab)_-$.

Quindi, applicando 2), 3) e a), b), c), d), si ottiene:

$(a+bi)\tau(c+di) = (a_-+bi)\tau(c_-+di) = (a_-+bi)\tau c_- + (a_-+bi)\tau di = c_-\tau(a_-+bi) + di\tau(a_-+bi) = c_-\tau a_- + c_-\tau bi + di\tau a_- + di\tau bi = (ca)_- + (cb)i + (ad)i + (-db)_- = (ca-db)_- + (cb+ad)i = (ac-bd) + (ad+bc)i$, che è la *).

A questo punto risulta che se esiste una τ con le proprietà 1) ... 5) essa è unica ed ha la forma indicata in *). Ciò non comporta che una τ siffatta esista. Resta quindi da provare che l'operazione determinata dalla formula *) soddisfa in effetti alle condizioni 1) ... 5). Lo si provi come esercizio. ■

DEF. 6) - Si definisce prodotto dei numeri complessi z, w il numero:

$zw := (Re\,(z)\,Re\,(w) - Im\,(z)\,Im\,(w)\,) + (Re\,(z)\,Im\,(w) + Im(z)\,Re\,(w)\,)\,i$.

EXR. 3) - Provare che la funzione $\Gamma := \{\,x \to (x,0): x \in R\}$ ha le seguenti proprietà:

$\Gamma\,(x+y) = \Gamma\,(x) + \Gamma\,(y);\ \Gamma\,(-x) = -\Gamma\,(x);\ \Gamma\,(x \cdot y) = \Gamma\,(x) \cdot \Gamma\,(y)$.

(Quindi $(x+y)_- = x_- + y_-$, $(-x)_- = -x_-$, $(xy)_- = x_-\,y_-$).

OSSERVAZIONE: In base alla DEF. 6 possiamo scrivere $(m^*\,(i))\,(ai) = i\,(ai) = -a_-$. Inoltre la funzione $m^*\,(i)$ coincide con la moltiplicazione per i sull'asse reale, in quanto esse associano ad a_- il numero ai. Dal momento che m^* (i) era stata costruita come rotazione , si può verificare se la moltiplicazione per i, che indichiamo con $(\cdot\, i)$, agisce nella rappresentazione come la suddetta rotazione. Siccome $(\cdot\, i)\,(z) = zi = (Re\,(z) + Im\,(z)\,)\,i = -Im\,(z) + Re\,(z), i$, quanto detto equivale a verificare che la funzione $\{\,(a,b) \to (-b,a): a, b \in R\}$ è rappresentata da una rotazione. Ciò è avallato da varie prove su punti scelti ad arbitrio nel piano cartesiano della visualizzazione di C.

DEF. 7) - Chiamiamo trasformazione in C ogni funzione biiettiva $C \to C$. Una trasformazione in C che sia simmetrica (ossia, se indichiamo con Φ la trasformazione e $z, w \in C$ sono punti arbitrari tali che $(z,w) \in \Phi$, si ha $(w,z) \in \Phi$; quindi $\Phi = inv\,(\Phi)$) è detta una simmetria in C.

EXR. 4) - Dimostrare che se Φ è una simmetria, allora $\Phi \circ \Phi\,(z) = z$, per ogni $z \in C$. Quindi indicando con $id\,(C) := \{\,z \to z: z \in C\}$ la funzione identica su C, si ha $\Phi \circ \Phi = id\,(C)$.

DEF. 8) - Si definisce trasformazione ortogonale fondamentale la trasformazione *ort*: $= (\cdot i)$ (v. l'osservazione precedente). Pertanto, se $z \in C$, si ha $ort(z) = zi = -Im(z) + Re(z)\,i$.

EXR. 5) - Provare che $inv(ort) = \{z \to -ort(z): z \in C\}$ e che, per ogni $z \in C$, si ha: $ort(-z) = -ort(z) = inv(ort)(z)$.

DEF. 9) - Si definisce reciproco del numero complesso z un numero w tale che $zw = 1_-$. Si definisce quoziente di $z \in C$ e $w \in C$ un numero $u \in C$ tale che $z = uw$ (definizioni analoghe a quelle date per i numeri reali).

THE. 2) - Se $z \neq 0_-$, allora esiste uno ed un solo w reciproco di z.

Invece non esiste alcun reciproco di 0_-.

Dim.: Se $w = c + di$ è reciproco di $z = a + bi$, allora per la DEF. 9) si ha: $(c+di)(a+bi) = 1_-$, quindi $(ca-db) + (cb+da)(i = 1_-$, ossia $(ca-db, cb+da) = (1, 0)$. Pertanto deduciamo che:

$$\begin{cases} ca - db = 1 \\ cd + ba = 0. \end{cases}$$

Tale sistema lineare nelle incognite c, d ha la soluzione $(c, d) = (a/(a^2+b^2), -b/(a^2+b^2))$. Quindi esiste al massimo tale $w = c + di$ che sia reciproco di z. Per dimostrare che tale w è effettivamente reciproco di z, si procede col calcolo diretto che verifica l'uguaglianza $(a/(a^2+b^2) - b/(a^2+b^2)\,i)\,(a + bi) = 1_-$. Per quanto concerne la seconda parte dell'enunciato del teorema, se esistesse un $w \in C$ reciproco di 0_-, allora si avrebbe $w0_- = 1_-$ quindi, essendo $w0_- = 0_-$, seguirebbe l'assurdo che $0_- = 1_-$. ■

DEF. 10) - Poniamo, per un qualunque $z = a + bi \neq 0_-$: $rec(z) := a/(a^2+b^2) - b/(a^2+b^2)\,i$.

THE. 3) - Dati due numeri complessi z, w, con $w \neq 0_-$, esiste un unico $u \in C$ quoziente di z e w. Inoltre, se $z \neq 0_-$

allora non esiste alcun quoziente di z e 0_-, mentre ogni numero complesso è quoziente di 0_- e 0_-.

Dim.: se $u \in C$ è tale che $uw = z$, allora $(uw)\, rec\,(w) = z \cdot rec\,(w)$ e quindi, per l'associatività della moltiplicazione in C, $u\,(w \cdot rec\,(w)) = z \cdot rec\,(w)$, ossia $u \cdot 1_- = z \cdot rec\,(w)$. Quindi se u è quoziente di z e w, allora $u = z \cdot rec\,(w)$; pertanto vi è al massimo uno di tali u. D'altra parte, $z \cdot rec\,(w)$ è effettivamente un quoziente di z e w. Resta quindi provata la prima parte del teorema. Se, poi, quando $z \neq 0_-$, esistesse un numero u quoziente di z e 0_-, si avrebbe $u0_- = z$, quindi $0_- = z$, contro il fatto che $z \neq 0_-$. Infine, preso un qualunque numero $u \in C$, si ha $u0_- = 0_-$; pertanto u è quoziente di 0_- e 0_-. ■

DEF. 11) - Se z, $m \in C$ e $w \neq 0_-$, poniamo $z/w := z \cdot rec\,(w)$.

In particolare, segue che $rec\,(w) = 1_-/w$.

EXR. 6) - Provare che la funzione Γ definita in EXR. 3 ha l'ulteriore proprietà: $\Gamma\,(x/y) = \Gamma\,(x)/\Gamma\,(y)$, per ogni scelta di $x \in R$ e $y \in R - \{0\}$.

CONVENZIONE: nel seguito a_- verrà scritto semplicemente come a e si capirà dal contesto se ci si riferisce ad un numero complesso dell'asse reale o ad uno reale. Ad esempio, scrivendo: $a \in C$ si intende: $a_- \in C$, se $a \in R$; mentre $1/w$ significa $1_-/w$, quando $w \in C$.

EXR. 7) - Dati u, v, $w \in C$ con v, $w \neq 0$, provare che $u/w = (uw)/(vw)$, che $u/(v/w) = (uw)/v$ e che $(u/v)/w = u/(vw)$. Dimostrare inoltre che se $k \in R$ e $k \neq 0$, allora $u/k = u/k_- = (1/k)\,u$.

PROPRIETÀ: per determinare il quoziente di $z = a + bi$ e $w = c + di \neq 0$, oltre a seguire la DEF. 11), possiamo usare la prima uguaglianza dell'EXR. 7), moltiplicando z e w per $c - di$. Otteniamo: $z/w = (\,(a+bi)\,(c-di)\,)/(c^2+d^2) = (ac+bd+(bc-ad)\,i)\,/\,(c^2+d^2) = (ac+bd)\,/\,(c^2+d^2) + (\,(bc-ad)\,/\,(c^2+d^2)\,)\,i$.

DEF. 12) - Sia z un numero complesso. La trasformazione:

$$\text{tra } (z) := \{u \to u + z: u \in C\}$$

è detta traslazione di spostamento z.

EXR. 8) - Dato un numero complesso non nullo u, e fissato $z \in C$, rappresentare $ret(u)$ e $tra(z)$ $(ret(u)) := \{tra(z)(w): w \in ret(u)\}$. Inoltre dimostrare che $tra(z)(ret(z)) = ret(z)$ e che se $k \in R - \{o\}$ si ha $ret(kz) = ret(z)$.

DEF. 13) - Si definisce il medio fra z e w elementi di C ponendo:

$$med(z, w) := ½(z+w) = (z+w)/2$$

e in generale, data una famiglia di numeri $z: [1 \ldots n] \to C$, con $n \in N - \{0\}$, chiamiamo baricentro di z il numero:

$$bar(z) := \Sigma(z)/n = (\sum_{i=1}^{n} z(i))/n$$

2) ISOMETRIE IN C

DEF. 1) - Definiamo le seguenti funzioni $C \to C$:

α) $opp := \{z \to -z: z \in C\}$ (detta opposizione o simmetria centrale)

β) $con := \{z \to Re(z) - Im(z)i: z \in C\}$ (detta coniugazione o simmetria rispetto all'asse reale)

γ) $ver := \{z \to -Re(z) + Im(z)(i): z \in C\}$ (simmetria rispetto all'asse verticale)

δ) $bis := \{z \to Im(z) + Re(z)i: z \in C\}$ (simmetria di bisezione).

DEF. 2) - Chiamiamo bisettrice principale la retta $bsp := ret(1+i)$ e bisettrice secondaria la retta $bss := ret(1-i) = ret(-1+i)$.

EXR. 1) - Provare che le funzioni α) ... δ) sono simmetriche in C (v. 1. DEF. 7), e vedere come esse agiscono sugli insiemi *sem* (1), *sem* (i), *sem* (-1), *sem* ($-i$) (v. 1. DEF. 3) e su *bsp* e *bss*. Comporre, poi, le suddette simmetrie a due a due ed esprimere *ort* come funzione composta di due di esse (v. 1. DEF. 8).

La composizione di due simmetrie dà luogo ad una simmetria ?

Provare che per $z, w \in C$ si ha $con\,(z+w) = con\,(z) + con\,(w)$, $con\,(zw) = con\,(z)\ con\,(w)$, $con\,(con\,(z)) = z$.

DEF. 3) - Si definisce retta ortogonale a $z \in C$ la retta $ret\perp(z) := ret\,(ort\,(z))$ e invece si chiama semiretta fondamentale ortogonale a $z \in C$ la semiretta $sem\perp(z) := sem\,(ort\,(z))$. Si dice che w è ortogonale a z se e solo se $w \in ret\perp(z)$ oppure $z=0$; in tal caso si scrive simbolicamente: $w \perp z$.

EXR. 2) - Dimostrare che $ret\perp(-z) = ret\perp(z)$ e $sem\perp(-z) = -\,sem\perp(z)$, interpretando queste uguaglianze geometricamente. Provare che se $w \perp z$, allora $z \perp w$ e che se $w \perp z$ e $x \perp u$ e $u, z \neq 0$, allora $w \in ret\,(u)$. Cosa sono $ret\,(0)$ e $ret\perp(0)$ e le semirette corrispondenti ? Dimostrare inoltre che se u, $v \in C$ e $u \perp v$ e $k \in R$, allora $u \perp kv$.

DEF. 4) - Dati due numeri complessi z, w, chiamiamo vettore congiungente z con w il numero che aggiunto a z dà w, ossia $vet\,(z, w) := w - z$.

EXR. 3) - Provare che, dati u, v, $w \in C$, si ha la seguente relazione, detta di Chasles: $vet\,(u, v) + vet\,(v, w) = vet\,(u, w)$. Illustrarla con un disegno.

DEF. 5) - Definiamo retta di pendenza $m \in R$ la retta $Rt\,(m) := ret\,(1+mi)$ e retta di pendenza m ed altezza $n \in R$ l'insieme $rtt\,(m, n) := tra\,(ni)\ (Rt\,(m))$.

EXR. 4) - Rappresentare $rtt\,(m, n)$ e provare che $rtt\,(m, n) = \{(x, y) \in R \times R;\ y = mx + n\}$ e, fissato $n \in R$, studiare rtt

(m, n) al variare di $m \in R$ (cioè studiare la funzione $rtt(-, n)$), mentre, fissato $m \in R$, studiare $rtt(m, n)$ al variare di $n \in R$ (cioè studiare la funzione $rtt(m, -)$).

OSSERVAZIONE: facendo variare i parametri reali m ed n, la retta $rtt(m, n)$ prende tutte le posizioni possibili nel piano tranne quelle verticali, cioè parallele all'asse immaginario $\{0\} x R$. Perciò diamo la

DEF. 6) - Chiamiamo retta verticale spostata di $\sigma \in R$ l'insieme: $rtv(\sigma) := tra(\sigma)(\{0\} x R) = \{u+\sigma : u \in C, \ Re(u) = 0\} = \{(\sigma, x) : x \in R\}$.

EXR. 5) - Dimostrare che $rtv(\sigma) = \{\sigma\} + ret(i)$ e $rtt(m, n) = \{ni\} + ret(1+mi)$ (v. 1. DEF. 2).

CONVENZIONE: Nell'effettuare una operazione fra due insiemi di cui uno sia singolare (ossia di un solo elemento), quando non ci sono rischi di confusione, eviteremo di scrivere le parentesi graffe relative all'insieme singolare. Ad esempio, invece di scrivere $ret(1+mi) + \{ni\}$, useremo la notazione semplificata $ret(1+mi) + ni$.

DEF. 7) - Riuniamo le definizioni DEF. 5 e DEF. 6 nell'unica scrittura:

$$Rtt(m, n) = \begin{cases} rtt(m, n) & \text{se } m, n \in R \\ rtv(n) & \text{se } m = \infty, \ n \in R \end{cases}$$

definita per $(m, n) \in (R \, U\{\infty\}) x R$ e giustificata dal fatto che quando m cresce la pendenza di $rtt(m, n)$ si avvicina a quella verticale.

DEF. 8) - Dati $m \in R \, U\{\infty\}$, $n \in R$ e $z \in C$, chiamiamo simmetrico di z rispetto alla retta $Rtt(m, n)$ un punto $w \in C$ con le seguenti proprietà:

α) $med(z, w) \in Rtt(m, n)$

β) $vet(z, w) \perp Rtt(m, n)$ (cioè $vet(z, w) \perp u$, per ogni $u \in Rtt(m, n)$).

THE. 1) - Se $m \in R \cup \{\infty\}$ e $z \in C$, allora esiste uno ed un solo $w \in C$ simmetrico di z rispetto alla retta $Rtt(m, 0)$ e si ha:

$$*) \quad w = (H(m) + K(m)\, i) \cdot con\ (z)$$

dove si è posto:

$$**) \quad H(m) = \begin{cases} (1-m^2) / (1+m^2) & \text{se } m \in R \\ -1 & \text{se } m = \infty \end{cases}$$

$$K(m) = \begin{cases} 2m / (1+m^2) & \text{se } m \in R \\ 0 & \text{se } m = \infty \end{cases}$$

Dim.: osserviamo innanzitutto che la condizione β) della DEF. 8 equivale ad asserire che $vet(z, w)$ è ortogonale ad un elemento non nullo di $Rtt(m, n)$, quindi nel caso specifico di $Rtt(m, 0)$. Consideriamo prima il caso in cui $m \in R$. Si ha che $vet(z, w) \perp 1 + mi$, ossia $w - z \in ret \perp (1 + mi) = ret(ort(1 + mi)) = ret(-m + i)$, quindi esiste $k \in R$ tale che $w - z = k(-m + i) = -mk + ki$.

Poniamo $z = a + bi$ e $w = x + yi$. Allora $x - a = -mk$ e $y - b = k$, cioè:

$$a) \quad x - a = -m(y - b).$$

Questa condizione deriva da β). Dalla α) discende immediatamente che $(a + x)/2 + i(b + y)/2 = h \cdot (1 + mi)$ per un certo $h \in R$, e quindi:

$$b) \quad (b + y)/2 = m \cdot (a + x)/2.$$

Le equazioni a) e b) conducono a *), tenute presenti le posizioni **).

Nel caso in cui $m = \infty$, la β) conduce alla condizione: $w - z \perp rtv(0)$, quindi $w - z$ ortogonale ad $i \in rtv(0)$, perciò $w - z$ è sull'asse reale; pertanto si ha:

$$a') \quad y - b = 0.$$

La condizione α) dà: $med\,(z, w) = \sigma \cdot i$, per un opportuno $\sigma \in R$, quindi:

b') $(a+x) / 2 = 0$.

a') e b') implicano $(x, y) = (-a, b)$, per cui w soddisfa alla *) anche in questo caso.
Conviene osservare che al tendere di m all'infinito $H\,(m)$ si avvicina a -1, mentre $K\,(m)$ si avvicina a 0, e ciò giustifica le scritture $H\,(\infty)$ e $K\,(\infty)$ dedotte dalle posizioni **). ■

OSSERVAZIONE: il numero $H\,(m) + K\,(m)\,i$ che figura nella *) del teorema precedente è il simmetrico di $z \doteq 1$, rispetto alla retta $Rtt\,(m, 0)$, come si ricava dalla *) stessa, e quindi ha anch'esso una rappresentazione geometrica.

DEF. 9) - Indichiamo con $sim\,(m)$ la trasformazione in C che associa ad ogni $z \in C$ il simmetrico (esistente e unico per il THE. 1) di z rispetto a $Rtt\,(m, 0)$ e pertanto tale simmetrico è $sim\,(m)\,(z)$. $sim\,(m)$ è detta simmetria fondamentale di pendenza m.

EXR. 6) - Provare che, per ogni $m \in R\, U \{\infty\}$, $sim\,(m)$ è una simmetria in C; che $sim\,(\infty) = ver$ (v. DEF. 1); che, se $m \in R$, si ha $H\,(m) + K\,(m)\,i = (1+mi)^2 / (1+m^2)$ e tale numero, anche per $m = \infty$, è il quadrato $z^2 := zz$ di un opportuno $z \in R\,(m, 0)$. Inoltre, dato un $u \in C$, determinare i simmetrici di u che appartengono all'asse reale (cioè del genere $sim\,(m)\,(u) \in Rx\,\{0\}$, per opportuni $m \in R\; U\,\{\infty\}$), verificando che essi sono fra loro opposti e hanno valore assoluto pari a: $\sqrt{(a^2+b^2)}$, dove $a = Re\,(u)$ e $b = Im\,(u)$.

DEF. 10) - Chiamiamo modulo una funzione $\mu : C \to R$ che:

1) concida sull'asse reale con la funzione valore assoluto $abs := \{x \to |x| : x \in R\}$ (ossia tale che $\mu\,(x, 0) = |x|$, per $x \in R$);

2) che sia invariante per simmetrie fondamentali, cioè che se $m \in R\; U\,\{\infty\}$ e $z \in C$, allora $\mu\,(z) = \mu\,(sim)\,(m)\,(z)$

OSSERVAZIONE: Le condizioni 1), 2) di DEF. 10 dànno a $\mu(z)$ il significato geometrico di distanza di z da 0, in quanto è il significato geometrico del valore assoluto per i numeri dell'asse reale, e due punti fra loro simmetrici sono equidistanti da 0.

THE. 2) - Esiste un'unica funzione modulo μ, ed è tale che se $z \in C$, allora:

*) $\mu(z) = \sqrt{(Re^2(z) + Im^2(z))}$.

Dim.: Se μ è una funzione modulo e $z \in C$, allora per la 2) di DEF. 10 si ha: $\mu(z) = \mu(sim(m)(z))$ per ogni $m \in R \cup \{\infty\}$; possiamo scegliere m in modo che $sim(m)(z)$ sia sull'asse reale e ciò (v. EXR. 6) comporta due possibili valori per $sim(m)(z)$, ambedue aventi valore assoluto dato dal secondo membro di *); per la 1) di DEF. 10, quindi, $\mu(z)$ coincide con tale valore assoluto, cioè vale la *). ■

DEF. 11) - Poniamo, per $z \in C$:

$$|z| := \sqrt{(Re^2(z) + Im^2(z))}.$$

THE. 3) - Siano $m \in R \cup \{\infty\}$, $N \in R$, $z \in C$. Esiste un unico simmetrico w di z rirpetto a $Rtt(m, n)$, dato dalla formula:

#) $w = sim(m)(z-t) + t$

dove t è il punto reale della retta $Rtt(m, n)$, che è $-n/m$ se $m \in R$, mentre coincide con n quando $m = \infty$.

Dim.: per dimostrare il teorema si può procedere col calcolo effettivo delle soluzioni di un sistema lineare nelle incognite $x := Re(w)$, $y := Im(w)$, come abbiamo fatto per il THE. 1, però è più elegante e geometricamente istruttivo procedere in un altro modo, cioè tramite traslazioni.

Osserviamo innanzitutto che se trasliamo con una traslazione $tra(u)$ sia la retta $Rtt(m, n)$ che z, rimarrà traslato con la stessa traslazione il simmetrico w. Precisando meglio, w è simmetrico di z rispetto a $r := Rtt(m, n)$ se e solo se $tra(u)(w)$ è simmetrico di $tra(u)(z)$ rispetto a $tra(u)(r)$. Ciò si può dimostrare come esercizio su traslazioni, punti medi ed ortogonalità. Basiamoci quindi sulla arbitrarietà di u per ricondurci alla situazione del THE. 2. Se $m \in R$, allora con $u = -ni$ otteniamo $tra(u)(r) = Rtt(m, 0)$ e quindi $tra(-ni)(w) = sim(m)(tra(-ni)(z))$, cioè:

$$\alpha) \quad w = sim(m)(z - ni) + ni.$$

Se invece $m = \infty$, allora con $u = -n$ otteniamo $tra(u)(r) = rtv(0) = Rtt(\infty, 0)$ per cui ricaviamo $tra(-n)(w) = sim(\infty)(tra(-n)(z))$, cioè:

$$\beta) \quad w = ver(z-n) + n = ver(z) + 2n.$$

Restano così provate l'esistenza e l'unicità del simmetrico w di z rispetto ad r. Abbiamo ricavato α) con una traslazione verticale (cioè con spostamento immaginario puro) e β) con una orizzontale (cioè con spostamento reale). Possiamo ottenere anche α) con una traslazione orizzontale prendendo $u = n/m$ (tenendo presente che $-n/m \in Rtt(m, n)$), ottenendo:

$$\alpha') \quad w = sim(m)(z + n/m) - n/m.$$

β) e α') conducono immediatamente a #). ■

DEF. 12) - Indichiamo con $sym(m, n)$ la simmetria che associa ad ogni $z \in C$ il simmetrico di z rispetto alla retta $Rtt(m, n)$. Quindi si ha:

$$sym(m, n)(z) = sim(m)(z - t(m, n)) + t(m, n)$$

con:

$$t(m, n) = \begin{cases} -n/m & \text{se } m \in R \\ n & \text{se } m = \infty. \end{cases}$$

EXR. 7) - Posto $rta(m, t) := Rt(m) + t = Rtt(m, 0) + t$, studiare le funzioni $rta(\cdot, t)$ e $rta(m, \cdot)$ e determinare la relazione fra Rtt e rta.

Provare inoltre che la simmetria $sym(m, n)$ lascia fissi i punti di $Rtt(m, n)$, cioè che se $z \in Rtt(m, n)$, allora $sym(m, n)(z) = z$, e che lascia solo tali i punti di tale retta.

Infine, dimostrare che per ogni $m \in R \cup \{\infty\}$ si ha $|H(m) + iK(m)| = 1$; che se u è un numero complesso di modulo 1, allora esiste $m \in R \cup \{\infty\}$ tale che $H(m) + iK(m) = u$ (determinare tale m, precisando se esso è individuato univocamente da u); che se z e w sono numeri complessi, allora $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, $|z| = |\, con(z) \,| = |-z|$ e $|1/z| = 1/|z|$ (quest'ultima uguaglianza con $z \neq 0$).

THE. 4) - Siano Φ e Θ due simmetrie fondamentali. Esiste un $u \in C$ tale che:

$$*) \quad \Phi \circ \Theta = \{ z \rightarrow u \cdot z : \; z \in C \}$$

e tale u ha modulo 1. Inoltre, se Φ è una simmetria fondamentale e u è un numero complesso di modulo 1, allora esiste una simmetria fondamentale Θ tale che valga la relazione *).

Dim.: Se $\Phi = sim(s)$ e $\Theta = sim(t)$, con $s, t \in R \cup \{\infty\}$, e $z \in C$, e se poniamo:

**) $\beta(m) := H(m) + iK(m)$ per ogni $m \in R \cup \{\infty\}$,

allora $\Phi \circ \Theta(z) = \Phi(\Theta(z)) = \Phi(\beta(t) \cdot con(z)) = \beta(s) \cdot con(\beta(t)) \cdot z$, quindi vale *) con $u = \beta(s) \cdot con(\beta(t))$.

Si ha anche: $|u| = |\beta(s)\, con(\beta(t))| = |\beta(s)| \cdot |\, con(\beta(t))| = 1 \cdot |\beta(t)| = 1 \cdot 1 = 1$.

Se invece sono dati Φ e u, con $|u| = 1$ e $\Phi = sim(s)$, allora $u/\beta(s)$ ha modulo 1, quindi (v. EXR. 7) esiste $t \in R \cup \{\infty\}$ tale che $\beta(t) = con(u/\beta(s))$; perciò si ha:

$u = \beta(s) \cdot con(\beta(t))$, ossia la *) è verificata con $\Theta = sim(t)$. ∎

DEF. 13) - Dati due punti $z, w \in C$, chiamiamo distanza di z da w il numero:

$$\text{dist.}\,(z, w) := |\, vet(z, w) \,|.$$

Quindi: $\text{dist.}\,(z, w) = |w - z| = |z - w| = \sqrt{((Re(z) - Re(w))^2 + (Im(z) - Im(w))^2)}$ (questa è la nota formula pitagorica della distanza).

Se f è una trasformazione in C, diciamo che f è una isometria se, presi comunque, $z, w \in C$, si ha:

$$\text{dist.}\,(z, w) = \text{dist.}\,(f(z), f(w))$$

(in tal caso si dice che f conserva le distanze).

EXR. 8) - Provare che la composizione di due isometrie è una isometria e che le simmetrie $sym\,(m, n)$ sono isometrie.

THE. 5) - Se f è una isometria e $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$ allora $f = id\,(C) = \{z \to z: z \in C\}$ oppure $f = con$.

Dim.: Poniamo $z = a + bi$ e $f(z) = c + di$. Siccome $|f(z) - f(0)| = |z - 0| = |z|$ e $|f(z) - f(1)| = |z - 1|$, dal fatto che $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, segue che $|f(z)| = |z|$ e $|f(z) - 1| = |z - 1|$. Perciò $c^2 + d^2 = a^2 + b^2$ e $(c-1)^2 + d^2 = (a-1)^2 + b^2$. Da tali uguaglianze deduciamo $a = c$ e $b = \pm d$, cioè:

%) $Re\,(z) = Re\,(f(z))$ e $Im^2\,(z) = Im^2\,(f(z))$.

Pertanto, prendendo $z = i$, ricaviamo che $f(i) = \pm i$. Nel caso in cui $f(i) = i$ abbiamo, per ogni $z \in C$, $|f(z) - i| = |f(z) - f(i)| = |z - i|$, quindi $a^2 + (b-1)^2 = c^2 + (d-1)^2$ e allora, essendo valide le uguaglianze %), si ha $b = d$, quindi $Im\,(z) = Im\,(f(z))$; in tal caso $f(z) = z$.

Se, invece, $f(i) = -i$, deduciamo $|f(z) + i| = |f(z) - f(i)| = |z - i|$, quindi $c^2 + (d+1)^2 = a^2 + (b-1)^2$, da cui, sempre tenute presenti le %), si deduce $d = -b$, ossia $Im\,(f(z)) = -Im\,(z)$, e di conseguenza $f(z) = con\,(z)$. ■

DEF. 14) - Si definiscono rotazioni intorno all'origine le isometrie che lasciano fisso solo il punto 0, cioè quelle isometrie f per cui si ha:

$$\{z \in C: f(z) = z\} = \{0\}.$$

Consideriamo rotazione intorno all'origine anche la trasformazione identica $id\,(C) = \{z \to z: z \in C\}$.

Se $u \in C$ e $|u| = 1$, poniamo: $rot\,(u) := \{z \to uz: z \in C\}$ (provare che $rot\,(u)$ è una rotazione).

THE. 6) - Sono rotazioni intorno all'origine tutte e sole le trasformazioni del tipo $rot\,(u)$ con $|u| = 1$. Inoltre, ogni isometria f che lascia fisso il punto 0 è del tipo $rot\,(u)$, con

$u = f(1)$. o è una simmetria fondamentale, precisamente $\{z \to f(1) \cdot con(z): z \in C\}$.

Dim.: che ogni $rot(u)$ sia una rotazione intorno all'origine è stato dato da stabilire appena sopra come esercizio. Proviamo adesso che se f è una rotazione intorno all'origine, allora essa è del tipo $rot(u)$ per un opportuno u di modulo unitario. Siccome ciò segue dalla seconda asserzione del teorema, consideriamo una isometria f tale che $f(0) = 0$ e proviamo che essa è del tipo $rot(u)$ o del tipo $sim(m)$. In effetti, prendiamo $u := f(1)$. Siccome f ha la proprietà di conservare le distanze, si ha: $|f(1) - f(0)| = |1-0| = 1$. Poiché f lascia fisso il punto 0, si ha $f(0) = 0$. Perciò abbiamo: $|u| = 1$. Definiamo a questo punto $g := inv(rot(u)) \circ f$ (in modo che $f = rot(u) \circ g$). Dal momento che $inv(rot(u)) = rot(1/u)$, come si prova subito, g è composta di due isometrie, quindi è essa stessa una isometria. Inoltre $g(1) = inv(rot(u))(f(1)) = inv(rot(u))(u) = 1$. Pertanto g è una isometria che lascia fissi 0 e 1, quindi per il THE. 5 si ha $g = id(C)$ oppure $g = con$, quindi, rispettivamente $f = rot(u)$ oppure $f = rot(u) \circ con = \{z \to u \cdot con(z): z \in C\}$, in questo secondo caso f risulta essere del tipo $sim(m)$ per un certo $m \in R \cup \{\infty\}$ (v. Exr. 7)).

Adesso, per provare che ogni rotazione intorno all'origine è del tipo $rot(u)$, osserviamo che una rotazione intorno all'origine f è una isometria che lascia fisso solo il punto 0 oppure è $id(C)$, quindi, per quanto appena detto, o è del tipo $rot(u)$ o del tipo $sim(m)$; ma questo secondo caso non è possibile, poiché una simmetria lascia fissi i punti di una retta, non solo l'origine o tutti i punti come nel caso di f. Pertanto f è del tipo rot (u). Da notare che abbiamo proprio $u = f(1)$, come abbiamo visto sopra, per cui $f = rot(f(1))$. ■

OSSERVAZIONE: possiamo sintetizzare quanto espresso dal THE 6 nel fatto che se f è una isometria che lascia fisso il punto 0 (ed eventualmente altri), si hanno due possibilità:

1) $f(z) = f(1) \cdot z$ per ogni $z \in C$

2) $f(z) = f(1) \cdot con(z)$ per ogni $z \in C$

1) si presenta quando f è una rotazione intorno all'origine che lascia fisso solo z (quando $f(1) \neq 1$) o lascia fissi tutti i punti (quando $f(1) = 1$; in tal caso $f = id(C)$), mentre 2) si presenta negli altri casi, in cui quindi f è una simmetria fondamentale e restano fissi i punti di una retta. Così abbiamo classificato completamente le isometrie per cui 0 è fisso. Da 1) e 2) deduciamo anche che ogni simmetria fondamentale f è ottenuta come composizione della simmetria di coniugazione con una rotazione intorno all'origine, esattamente quella che porta 1 in $f(1)$, ossia $rot(f(1))$ (infatti da 2) deduciamo $f = rot(f(1)) \circ con$); analogamente una rotazione intorno all'origine f è ottenibile come composizione della simmetria di coniugazione con la simmetria fondamentale che porta 1 in $f(1)$, come si deduce dal fatto che: $f = (rot(f(1)) \circ con) \circ con$.

THE. 7) - Una qualunque isometria f verifica una delle seguenti condizioni:

1) $f(z) = (f(1) - f(0))\ z + f(0)$, per ogni $z \in C$;

2) $f(z) = (f(1) - f(0))\ con(z) + f(0)$, per ogni $z \in C$.

Dim.: si segue un procedimento dimostrativo del tutto analogo a quello svolto per THE. 6. In questo caso si considera la trasformazione g definita come composizione della rotazione associata al numero complesso $f(1) - f(0)$ seguita dalla traslazione di spostamento $f(0)$. Osserviamo che il modulo di $f(1) - f(0)$ è 1. Una figura illustrerà la g chiarificandone la struttura. Tale funzione coincide con f per gli argomenti 0 e 1; pertanto le si possono applicare le argomentazioni di THE. 6, sostanzialmente applicando THE. 5 alla isometria $inv(g) \circ f$. Seguono quindi 1) e 2). ■

Da THE. 7 si evince che le isometrie sono tutte e sole le trasformazioni ottenute componendo una rotazione seguita da una traslazione (rototraslazioni) o il ribaltamento intorno all'asse reale seguito da una rototraslazione. Otteniamo così rispettivamente le isometrie dirette (o movimenti) e quelle inverse.