LE OTTO TRASFORMAZIONI ISOMETRICHE FONDAMENTALI DEL PIANO CHE LASCIANO FISSA ALMENO L'ORIGINE

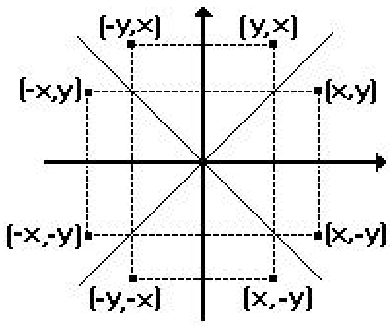
Una notevolissima associazione con le otto possibili terne binarie (ossia sequenze di 0 e 1 di lunghezza 3, che chiameremo ***trigrammi binari***) è data dalle otto trasformazioni geometriche piane fondamentali che lasciano fissa almeno l'origine (possiamo chiamarle "isometrie centrate"), che sono tutte isometriche (cioè conservano la distanza) e si suddividono in quattro simmetrie assiali e quattro rotazioni (le prime invertono l'orientamento di una figura, le seconde lo mantengono, ossia sono degli ***spostamenti***). La maniera più naturale di determinare tale associazione è far scaturire dal generico punto del piano (x,y) il punto trasformato (x',y') secondo tre operazioni : cambiamento di segno al primo posto (ascissa), cambiamento di segno al secondo posto (ordinata), scambio dei due posti (ascissa con ordinata). Otteniamo pertanto la tabella (operiamo da destra a sinistra, ossia i cambiamenti di segno prima dello scambio) :

scambio sx ↔ dx	cambio segno sx	cambio segno dx	punto finale
0	0	0	(x,y)
0	0	1	(x,-y)
0	1	0	(-x,y)
0	1	1	(-x,y)
1	0	0	(y,x)
1	0	1	(-y,x)
1	1	0	(y,-x)
1	1	1	(-y,-x).

Otteniamo pertanto le otto trasformazioni seguenti :

codice	formula	trasformazione	nome abbreviato
000	$(x,y) \to (x,y)$	identita	ide
001	$(x,y) \to (x,-y)$	coniugazione (simmetria rispetto all'asse delle ascisse)	con
010	$(x,y) \to (-x,y)$	coniugazione opposta o anticoniugazione (simmetria rispetto all'asse delle ordinate)	- con
011	$(x,y) \to (-x,-y)$	opposizione (simmetria rispetto all'origine degli assi)	- ide
100	$(x,y) \to (y,x)$	inversione o trasposizione (simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante)	inv
101	$(x,y) \to (-y,x)$	ortogonalità antioraria (rotazione di un quadrante in senso antiorario)	ort
110	$(x,y) \to (y,-x)$	ortogonalità oraria (rotazione di un quadrante in senso orario)	- ort
111	$(x,y) \to (-y,-x)$	inversione opposta o antiinversione (simmetria rispetto alla bisettrice del 2° e 4° quadrante)	- inv

La disposizione geometrica dei punti terminali di tali trasformazioni fornisce il seguente grafico a croce :

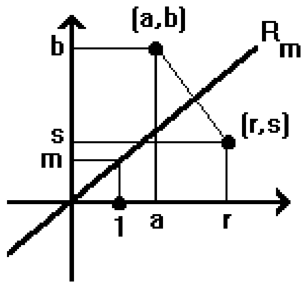


Osserviamo che le trasformazioni avente per codice trigrammi binari con un numero dispari di 0 sono rotazioni, per cui non modificano l'orientamento di una figura o un verso di rotazione e lasciano fissa o solo l'origine o tutto il piano (l'identità), mentre quelle di codice avente un numero dispari di 1 sono simmetrie assiali, che quindi invertono l'orientamento di una figura o un verso di rotazione e lasciano fissa un'intera retta passante per l'origine (simmetrie assiali).

Mostreremo come sia possibile ricavare algebricamente le nozioni fondamentali della geometria euclidea del piano dalle precedenti otto trasformazioni (che, come è evidente, si possono ricavare tutte dalla coniugazione e dall'inversione, o da altre due scelte opportunamente fra le otto),cui si potranno poi associare le traslazioni per svincolare tutto quello che si dirà dalla centratura nell'origine. Basterà mostrare come da queste discendano la metrica e la struttura delle isometrie piane. A meno di traslazioni, possiamo centrare sempre il nostro discorso nell'origine (ciò soltanto evita traslazioni di variabili indipendenti e dipendenti nelle formule).

SIMMETRIE ASSIALI CENTRALI

Sia R_m la retta passante per l'origine e per il punto (1,m) - cioè sia m la ***pendenza*** di tale retta - e sia (r,s) un punto qualunque del piano.
Ci proponiamo di determinare il punto (a,b) ***simmetrico*** di (r,s) rispetto a R_m . La situazione grafica è rappresentata dalla figura seguente :



La retta R_m è costituita dai punti (x,y) verificanti l'equazione y = mx :

$$R_m = \{ (x,y) : y = mx \} .$$

Poniamo la seguente definizione formale :

due punti P e Q sono simmetrici rispetto a una retta r se vengono verificate le seguenti due condizioni :

1) Il punto medio fra P e Q sia sulla retta r ;

2) La retta congiungente P e Q sia ortogonale a r .

Nel nostro caso le due condizioni diventano :
1) Il punto medio fra (r,s) e (a,b) sia sulla retta R_m ;
2) La retta congiungente (r,s) con (a,b) sia ortogonale a R_m .

*Una **simmetria assiale centrale** è una simmetria rispetto ad una retta passante per l'origine (detta **asse di simmetria**), cioè la relazione che associa ad ogni punto del piano il suo simmetrico rispetto a tale retta.*

Il ***punto medio*** fra (r,s) e (a,b) ha come ascissa la media aritmetica fra r e a, così come ha per ordinata la media aritmetica fra s e b. Pertanto la condizione 1) equivale alla seguente :

$$1^*) \quad \left(\frac{r+a}{2}, \frac{s+b}{2} \right) \in R_m$$

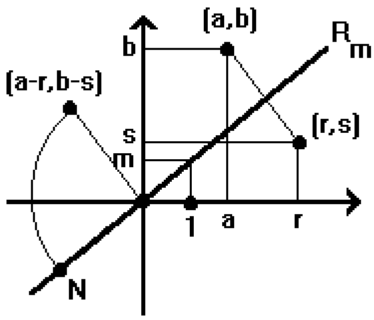
che equivale, a sua volta, a :

$$1^{**}) \quad \frac{s+b}{2} = m \cdot \frac{r+a}{2} \quad \text{ossia} \quad s+b = m \cdot (r+a)$$

Otteniamo perciò che la condizione 1) si traduce nella equazione :

$$1^{***}) \quad s + b = mr + ma .$$

Passiamo alla condizione 2). Per esprimere la ***ortogonalità*** delle suddette rette, potremo utilizzare la rotazione di un quadrante in senso antiorario o orario (rispettivamente indicate con ***ort*** e ***-ort***) se ***trasliamo*** il segmento congiungente i due punti simmetrici, in modo che (r,s) vada a finire nell'origine, e in tal caso il punto (a,b) viene traslato nella posizione (a-r,b-s), in modo che il punto N = ***ort*** (a-r,b-s) sia sulla retta R_m :



Ricordando che ***ort*** agisce secondo la formula ***ort*** (x,y) = (-y,x), deduciamo :

$$2^*) \quad (s-b, a-r) \in R_m$$

il che porta all'equazione :

$$2^{**}) \quad a-r = m \cdot (s-b)$$

ovvero :

$$2^{***}) \quad a - r = ms - mb .$$

Le equazioni 1***) e 2***) costituiscono il sistema :

$$\begin{cases} s + b = mr + ma \\ a - r = ms - mb \end{cases}$$

Considerando come dati r, s, m e considerando come incognite a, b, e pertanto risolvendo il sistema rispetto a queste due variabili, otteniamo le importanti ***formule di simmetria*** seguenti :

$$\begin{cases} a = \dfrac{1-m^2}{1+m^2}\, r + \dfrac{2m}{1+m^2}\, s \\[2ex] b = \dfrac{2m}{1+m^2}\, r - \dfrac{1-m^2}{1+m^2}\, s \end{cases}$$

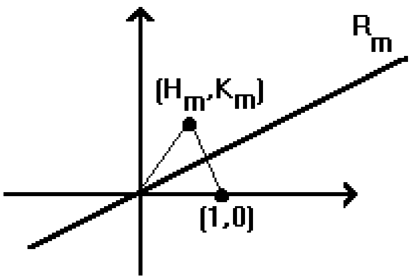
Osserviamo che in tali formule i coefficienti di r ed s dipendono solo da m e che a e b dipendono linearmente da r ed s. Ponendo :

$$\begin{cases} H_m = \dfrac{1-m^2}{1+m^2} \\ K_m = \dfrac{2m}{1+m^2} \end{cases}$$

chiamiamo tali quantità ***coefficienti parametrici*** relativi alla retta R_m , e le formule di simmetria si semplificano in :

$$\begin{cases} a = H_m \cdot r + K_m \cdot s \\ b = K_m \cdot r - H_m \cdot s \end{cases}$$

Ponendo $r = 1$ e $s = 0$ ricaviamo $H_m = a$ e $K_m = b$, ossia deduciamo che il punto avente come ascissa e ordinata i coefficienti parametrici della retta è il simmetrico del punto unitario dell'asse delle ascisse (1,0) rispetto a R_m , cioè è il punto a distanza 1 dall'origine tale che la retta che lo congiunge all'origine forma con l'asse delle ascisse un angolo doppio di quello relativo alla retta stessa R_m rispetto all'asse delle ascisse :



La pendenza della retta passante per l'origine e per il punto (H_m , K_m) , nel caso in cui sia $H_m \neq 0$ (e quindi se $m \neq \pm1$), è K_m / H_m , ossia $2m / (1-m^2)$. Otteniamo pertanto una formula di duplicazione per la pendenza, la quale partendo da un valore $m \neq \pm1$ fornisce la pendenza $\delta(m) = 2m / (1-m^2)$ della retta passante per l'origine e formante col semiasse positivo delle ascisse un angolo doppio rispetto a quello relativo alla retta di pendenza m.
L'asse delle ordinate ovviamente non ha pendenza (non avendo nessun punto di ascissa unitaria), ma gli si associa convenzionalmente una pendenza infinita $m = \infty$. Siccome la simmetria rispetto a tale asse, che abbiamo chiamato coniugazione opposta, è data, come visto, dalla formula -con (x,y) = (-x,y), ossia, coi simboli usati per le formule di simmetria assiale, dalle equazioni :

$$\begin{cases} a = (-1) \cdot r + 0 \cdot s \\ b = 0 \cdot r - (-1) \cdot s \end{cases}$$

siamo condotti a definire i coefficienti parametrici dell'asse delle ordinate nel modo seguente :

$$H_\infty = -1 \quad , \quad K_\infty = 0 .$$

Possiamo altresì porre $\delta(\pm1)=\infty$, per poter così definire l'operatore di duplicazione della pendenza anche per i valori ±1.