ISO-PLAN : isometrie nel piano

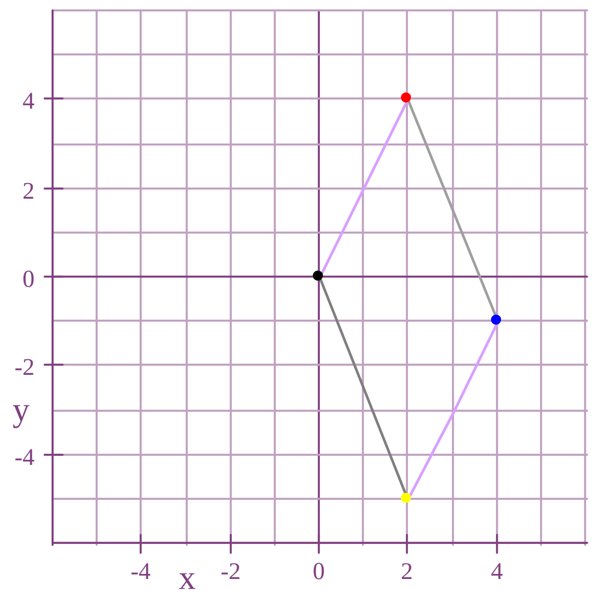
SEGMENTI E PUNTI MEDI

Scegliamo due punti P e Q :

$P = \langle 2, 4 \rangle$

$Q = \langle 4, -1 \rangle$

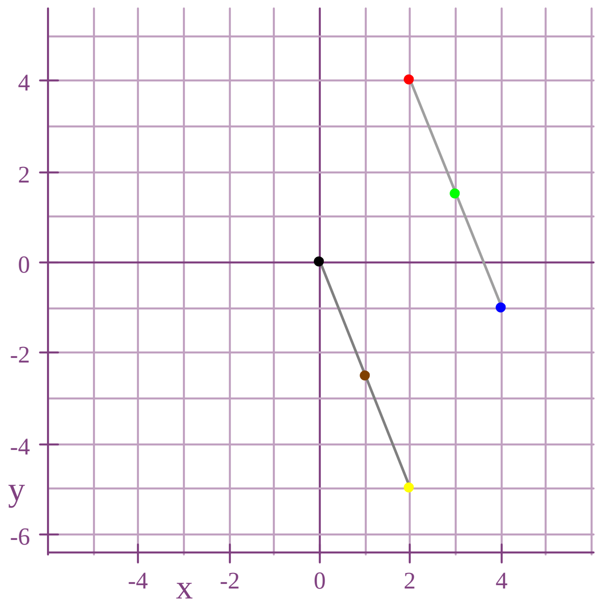
Rappresentiamo il punto P in rosso, Q in blu e Q - P in giallo :



Scegliamo un numero k :

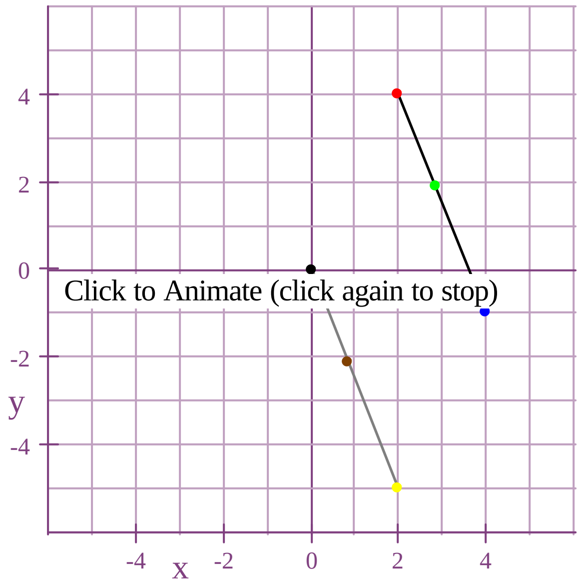
$k = \frac{1}{2}$

Ci proponiamo di determinare la posizione dei due punti (Q - P)k (in marrone) e P + (Q - P)k (in verde) :



Variamo k in modo da capire dal grafico seguente perché questi due punti sono così collocati :

Adesso animiamo P al variare di k :



Animate this graph for $k = 0 \ldots 1$ in steps of $\frac{1}{19}$ for a total of 20 frames one-way at 4 frames/second.

Il punto medio M = med(P,Q) fra P e Q si ottiene per k = 1 / 2

$$\mathrm{med}(P, Q) = P + \frac{1}{2}(Q - P)$$

$$\mathrm{med}(P, Q) = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} Q \qquad \text{Expand}$$

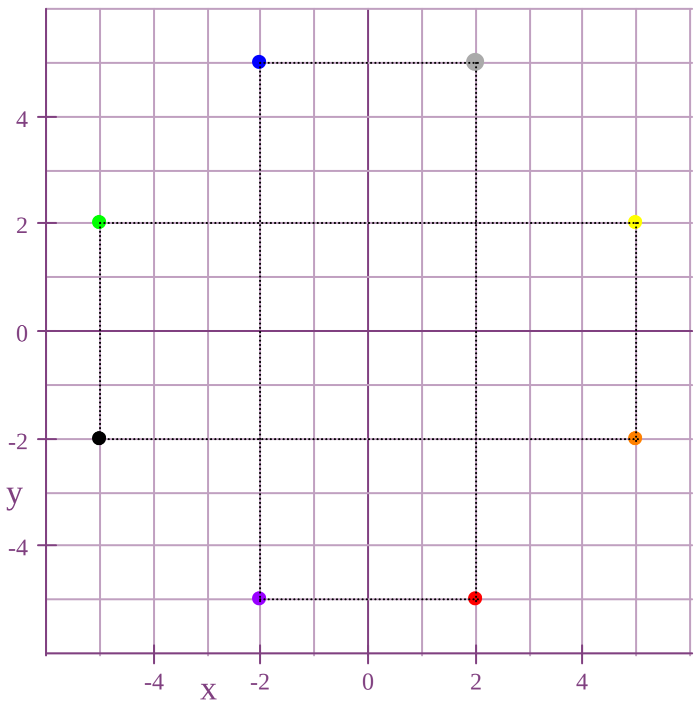
$$\mathrm{med}(P, Q) = \frac{1}{2}(P + Q) \qquad \text{Collect}$$

pertanto med(P,Q) è la "media aritmetica" fra P e Q.

TRASFORMAZIONI FONDAMENTALI NEL PIANO

Consideriamo un punto P = (x,y) (colorato qui sotto in grigio) e tutti i punti ottenibili da esso cambiando i segni e/o scambiando ascissa con ordinata :

$P = \langle 2,5 \rangle$



Nella sezione Funzioni è definita una funzione trasf che in corrispondenza ad una terna di valori zero / uno (ve ne sono otto) e ad una coppia (x,y) fornisce uno degli otto punti su costruiti associati a (x,y). Ad esempio :

$$\mathrm{trasf}\langle [1,1,0],[2,5] \rangle$$

$$\mathrm{trasf}\langle [1,1,0],[2,5] \rangle = \langle -2,5 \rangle$$

Problema :

Data una terna binaria (ossia di valori zero/uno) t, qual è la funzione inversa della trasformazione P - > trasf(t,P) ?

RETTE NEL PIANO E LORO PENDENZA

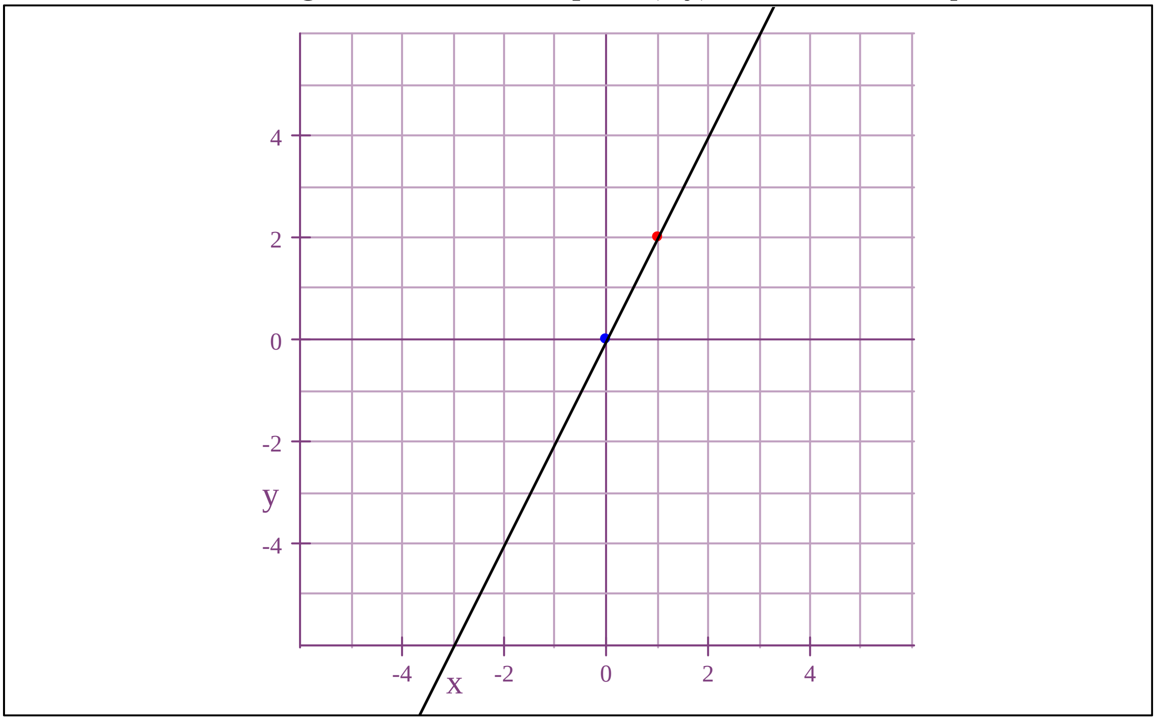
Consideriamo l'equazione :

$y = m\,x$

Prendiamo un valore a piacere per m, ad esempio :

$m = 2$

e determiniamo il grafico formato dai punti (x,y) soddisfacenti l'equazione :



Facendo variare il parametro m osserviamo che il grafico in questione è la retta passante per l'origine degli assi - ossia il punto (0,0) - e per il punto (1,m). Il numero m è detto "pendenza" della retta di equazione y = mx .

Nella sezione Funzioni è definita una funzione ret tale che ret (u,m) si annulla esclusivamente quando il punto u = (x,y) sta sulla retta di equazione y = mx. Tale funzione, quindi, serve per verificare che un punto u sta sulla retta suddetta.

Generalizziamo :

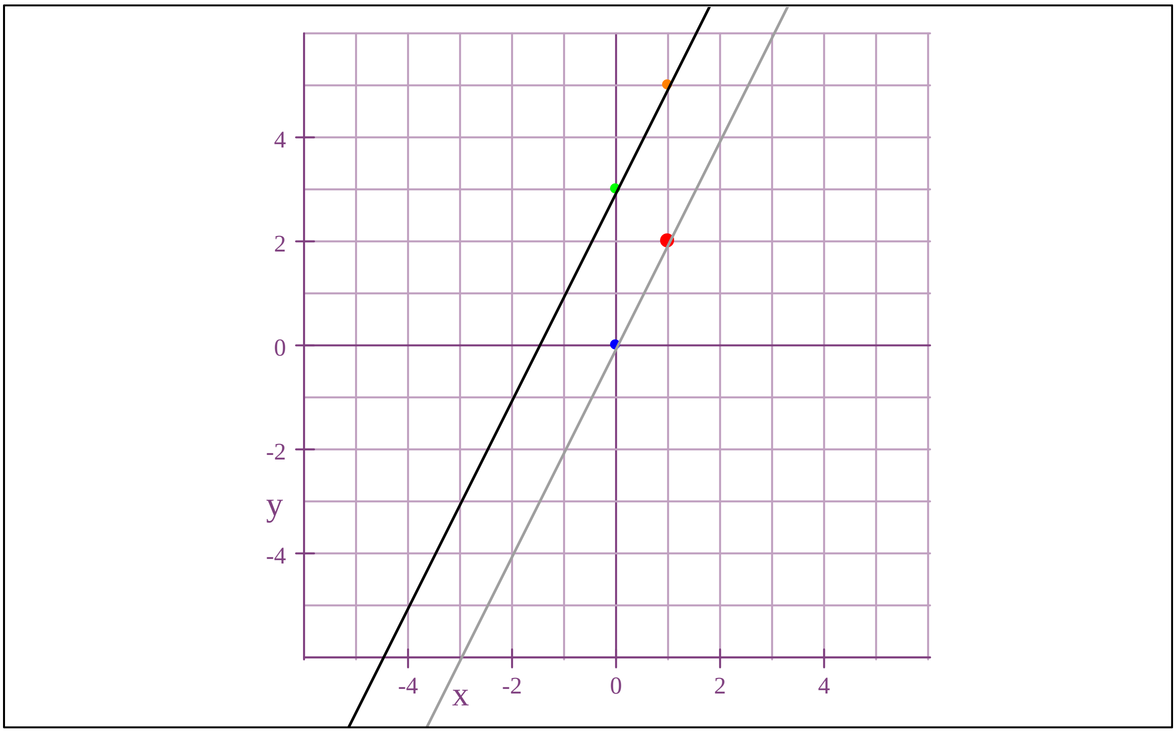
Consideriamo oltre a m anche un numero n, ad esempio :

$n = 3$

e consideriamo l'equazione :

$y = m\,x + n$

Proviamo a determinare il grafico, mantenendo tratteggiato anche quello di y = mx :



Domanda :

Facendo variare il perametro n, che relazione si nota fra la retta tratteggiata e quella non tratteggiata ? E che significato geometrico ha il punto (0,n) ? E che ruolo ha adesso il numero m ? Quali sono le coordinate del punto arancione ? Quale numero possiamo considerare per indicare la pendenza della retta non tratteggiata ? Come possiamo esprimere tramite la funzione ret l'appartenenza di un punto (x,y) alla retta di equazione y = mx + n ?

SIMMETRIA RISPETTO A UNA RETTA PASSANTE PER L'ORIGINE E DI PENDENZA DATA

Prendiamo un valore per la pendenza m :

$m = 2$

e consideriamo la retta r di equazione :

$y = m\,x$

Prendiamo anche un punto P = (a,b) (in rosso nel grafico):

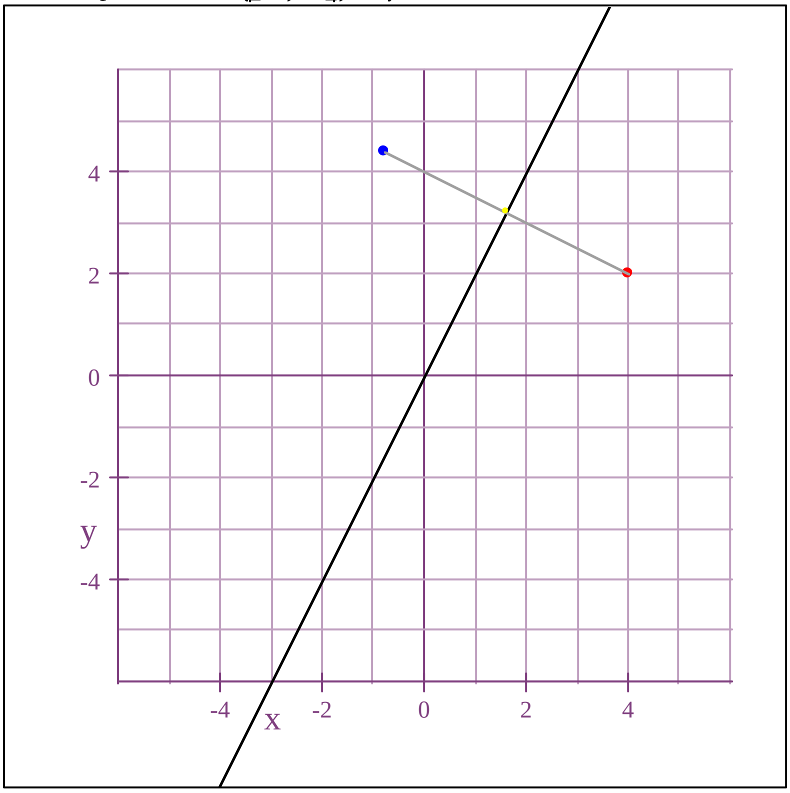
$a = 4$

$b = 2$

$P = (a, b)$

Il simmetrico di P rispetto a r è il punto Q (in blu) :

$Q = \mathrm{simm}([a, b], m)$



Come determinare il punto Q ?

Poniamo Q = (a',b') e cerchiamo a' e b'.

Osserviamo che il punto medio med(P,Q) appartiene alla retta r, ossia:

$\mathrm{ret}(\mathrm{med}[P, Q], m) = 0$

Inoltre il vettore P - Q è perpendicolare a r, ossia il punto P - Q sottoposto a una trasformazione ortogonale - ad esempio (x,y) - > (- y,x) - dà un punto di r :

$\mathrm{ret}(\mathrm{ort}[P - Q], m) = 0$

Elaboriamo tali condizioni :

$\mathrm{ret}(\mathrm{med}[P, Q], m) = 0$

$\left(\frac{1}{2}[P + Q]\right)_2 - m\left(\frac{1}{2}[P + Q]\right)_1 = 0$

$\mathrm{ret}\left(\frac{1}{2}[\{a, b\} + \{a', b'\}], m\right) = 0$

$\left(\frac{1}{2}[\{a, b\} + \{a', b'\}]\right)_2 - m\left(\frac{1}{2}[\{a, b\} + \{a', b'\}]\right)_1 = 0$

$\frac{1}{2}(b' + b) - m\left(\frac{1}{2}[\{a, b\} + \{a', b'\}]\right)_1 = 0$

$\frac{1}{2}(b' + b) - m\left(\frac{1}{2}[a' + a]\right) = 0$

$$\frac{1}{2} b' - \frac{1}{2} a\, m - \frac{1}{2} a'\, m + \frac{1}{2} b = 0$$
$$\left(\frac{1}{2} b' - \frac{1}{2} a\, m - \frac{1}{2} a'\, m + \frac{1}{2} b\right) 2 = 0\ 2$$
$$2\left(\frac{1}{2} b' - \frac{1}{2} a\, m - \frac{1}{2} a'\, m + \frac{1}{2} b\right) = 0$$
$$b' - a\, m - a'\, m + b = 0$$
$$\mathrm{ret}\left(\mathrm{ort}\left[P - Q\right], m\right) = 0$$
$$\mathrm{ret}\left(\mathrm{ort}\left[\{a, b\} - \{a', b'\}\right], m\right) = 0$$
$$\mathrm{ret}\left(\mathrm{ort}\left[a - a', b - b'\right], m\right) = 0$$
$$\mathrm{ret}\left(\left[-\{a - a', b - b'\}_2, \{a - a', b - b'\}_1\right], m\right) = 0$$
$$\mathrm{ret}\left(\left[-\{-b' + b\}, \{a - a', b - b'\}_1\right], m\right) = 0$$
$$\mathrm{ret}\left(\left[-\{-b' + b\}, -a' + a\right], m\right) = 0$$
$$\mathrm{ret}\left(\left[b' - b, -a' + a\right], m\right) = 0$$
$$\left(b' - b, -a' + a\right)_2 - m\left(b' - b, -a' + a\right)_1 = 0$$
$$\left(-a' + a\right) - m\left(b' - b, -a' + a\right)_1 = 0$$
$$\left(-a' + a\right) - m\left(b' - b\right) = 0$$
$$-a' + b\, m - b'\, m + a = 0$$

Pertanto il sistema da risolvere, nelle incognite a' e b', è :

$$b' - a\, m - a'\, m + b = 0$$
$$-a' + b\, m - b'\, m + a = 0$$

Ricaviamo a' dalla prima di tali due equazioni :

$$a' = \frac{b' - a\, m + b}{m}$$

e sostituiamolo nella seconda equazione :

$$-\frac{b' - a\, m + b}{m} + b\, m - b'\, m + a = 0$$

svolgiamo i calcoli :

$$-\frac{b}{m} - \frac{b'}{m} + b\, m - b'\, m + 2a = 0$$
$$-\frac{b}{m} - \frac{b'}{m} - b'\, m + b\, m + 2a = 0$$
$$-\frac{b}{m} - \frac{\left(m^2 + 1\right) b'}{m} + b\, m + 2a = 0$$
$$b' = \frac{\left(-\frac{b}{m} + b\, m + 2a\right) m}{m^2 + 1}$$
$$b' = \frac{b\, m^2 + 2a\, m - b}{m^2 + 1}$$
$$b' = \frac{b\, m^2 - b + 2a\, m}{m^2 + 1}$$
$$b' = \frac{b\left(m^2 - 1\right) + 2a\, m}{m^2 + 1}$$

quindi ricaviamo a' :

$$a' = \frac{b' - a\, m + b}{m}$$

$$a' = \frac{\frac{b(m^2-1)+2am}{m^2+1} - am + b}{m}$$

$$a'm = \frac{b(m^2-1)+2am}{m^2+1} - am + b$$

$$a'm = \frac{bm^2-b}{m^2+1} + 2\frac{am}{m^2+1} - am + b$$

$$a'm = \frac{bm^2-b}{m^2+1} - am + b + 2\frac{am}{m^2+1}$$

$$a'm = \frac{2bm^2 - a(m^2+1)m}{m^2+1} + 2\frac{am}{m^2+1}$$

$$a'm = \frac{(-a[m^2+1] + 2bm)m}{m^2+1} + 2\frac{am}{m^2+1}$$

$$a'm = \frac{(-am^2 + 2bm + a)m}{m^2+1}$$

$$a' = \frac{-am^2+2bm+a}{m^2+1}$$

Quindi abbiamo ottenuto :

$$a' = \frac{-am^2+2bm+a}{m^2+1}$$

ovvero :

$$a' = \frac{a - am^2 + 2bm}{m^2+1}$$

$$a' = \frac{a(-m^2+1)+2bm}{m^2+1}$$

$$a' = \frac{a(1-m^2)+2bm}{m^2+1}$$

$$a' = \frac{(1-m^2)a+2bm}{m^2+1}$$

$$a' = \frac{(1-m^2)a+2mb}{m^2+1}$$

$$a' = \frac{(1-m^2)a+2mb}{1+m^2}$$

$$b' = \frac{b(m^2-1)+2am}{m^2+1}$$

$$b' = \frac{2am + b(m^2-1)}{m^2+1}$$

$$b' = \frac{2ma + b(m^2-1)}{m^2+1}$$

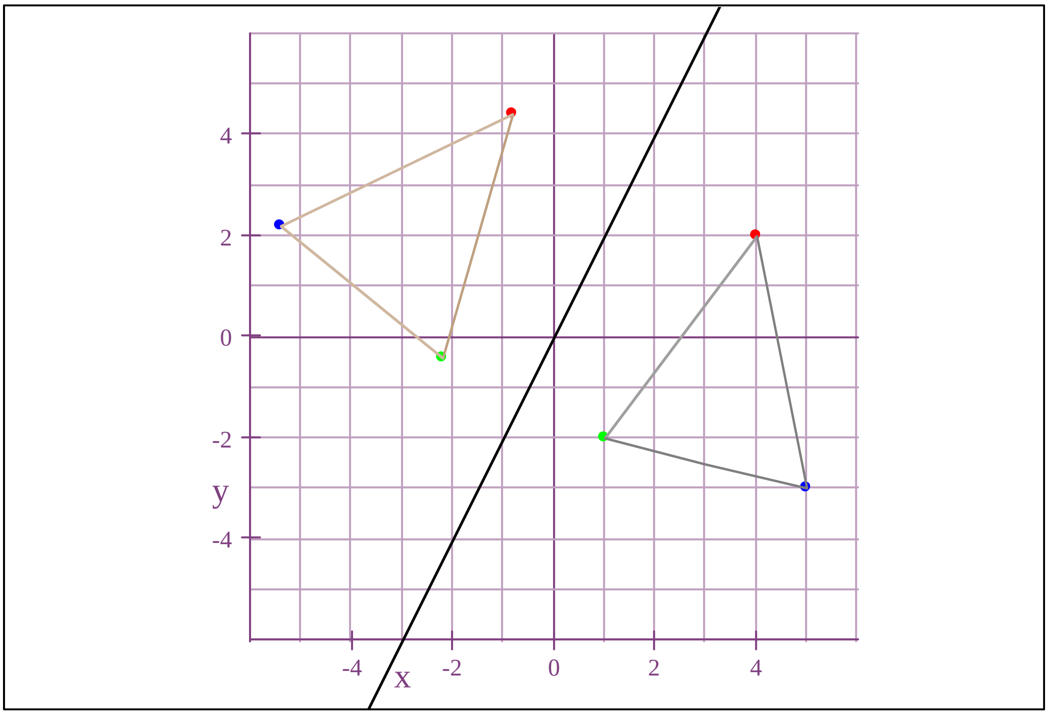
$$b' = \frac{2ma + (m^2-1)b}{m^2+1}$$

$$a' = \frac{(1-m^2)a + 2mb}{1+m^2}$$
$$b' = \frac{2ma + (m^2-1)b}{m^2+1}$$
Nella sezione Funzioni è definita una funzione simm che dati il punto u = (a,b) e il numero m fornisce il punto (a',b') tramite la formula sopra trovata. Possiamo notare come a' e b' dipendono, una volta fissato m, linearmente da a e b, ossia si determinano con formule del tipo:
$$x' = H x + K y$$
$$y' = L x + M y$$
nel nostro caso si ha:
$$L = K$$
$$M = -H$$
$$H = \frac{1-m^2}{1+m^2}$$
$$K = \frac{2m}{1+m^2}$$
Proviamo a calcolare la quantità :
$$H^2 + K^2$$
$$H^2 + K^2 = \left(\frac{-m^2+1}{m^2+1}\right)^2 + K^2$$
$$H^2 + K^2 = \left(\frac{-m^2+1}{m^2+1}\right)^2 + \left(2\frac{m}{m^2+1}\right)^2$$
$$H^2 + K^2 = \frac{m^4-2m^2+1}{m^4+2m^2+1} + 4\frac{m^2}{m^4+2m^2+1}$$
$$H^2 + K^2 = 1$$
Problema :

Abbiamo visto che per ogni m i valori corrispondenti di H e K verificano la formula appena trovata (la somma dei loro quadrati vale uno). Possiamo dire che, viceversa, dati comunque due numeri H e K verificanti tale formula esiste un valore di m per cui essi siano espressi dalle formule:
$$H = \frac{1-m^2}{1+m^2}$$
$$K = \frac{2m}{1+m^2}$$
(che sono dette "formule parametriche) ?

Una simmetria assiale inverte l'orientamento

Consideriamo oltre al punto P altri due punti P' e P":
$$P' = (1, -2)$$
$$P'' = (5, -3)$$
e i loro simmetrici rispetto alla retta di equazione y = mx :
$$Q' = \text{simm}(P', m)$$
$$Q'' = \text{simm}(P'', m)$$



Possiamo notere come l'ordine in cui si seguono i punti rosso - verde - blu nei due triangoli simmetrici dia in un caso il verso antiorario e nell'altro quello orario.

Per tale motivo diciamo che una simmetria assiale inverte l'orientamento.

Domande

Quali punti P sono fissi in una simmetria assiale (ossia simm(P,m) = P) ?

Esiste un valore del parametro m per cui la trasformazione P - > simm(P, m) è la simmetria rispetto all'asse delle ordinate ?

Se Q = simm(P,m) , quale punto è simm(Q,m) ?

Dato m, qual è l'inversa della trasformazione P - > simm(P,m) ?

MODULO DI UN PUNTO E DISTANZA FRA DUE PUNTI NEL PIANO

In questa sezione ci proponiamo di determinare la distanza di un punto P dall'origine del piano numerico, ossia dal punto (0,0). Chiameremo "modulo" di P tale distanza. Dal modulo ricaveremo poi in generale la distanza fra due punti del piano.

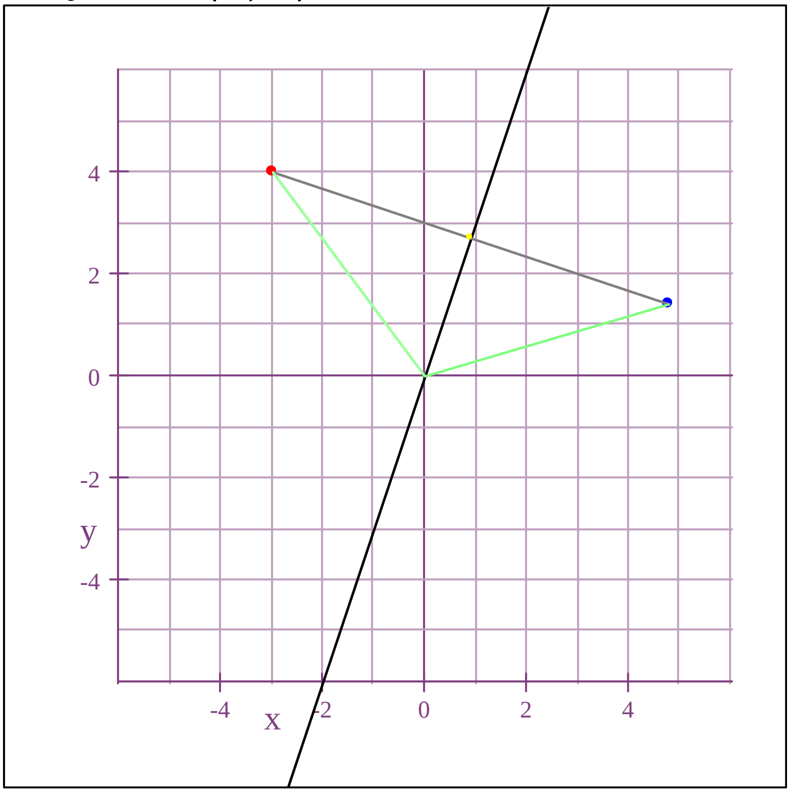
Passo numero 1: se P = (x,0) con x non negativo, il "modulo" (secondo la definizione appena data) di P è ovviamente x stesso.

Passo numero 2: il modulo di P coincide col modulo di un qualunque Q ricavato da P con simmetria rispetto a una qualunque retta passante per l'origine. Verifichiamo :

$P = \langle -3,4 \rangle$

$m = 3$

$Q = \mathrm{simm}(P, m)$



Passo numero 3: visto che il modulo di un punto P è "invariante" per simmetrie con asse passante per
l'origine, e visto che possiamo in modo banale valutare il modulo di punti che sono sul semiasse positivo delle ascisse ...

... IDEA !!! Vediamo di trovare un punto Q che stia sul semiasse positivo delle ascisse e che sia simmetrico di P tramite ad una di tali simmetrie. Il modulo di P sarà l'ascissa di Q ... semplicemente! Vediamo la situazione in una figura :

Fra l'altro risolveremmo così anche il problema della determinazione della bisettrice r dell'angolo fra i due segmenti tratteggiati in verde (trovando la pendenza di tale bisettrice, che passa per l'origine).

Determinazione del modulo di P

Indichiamo con a e b le coordinate di P, con x (non negativa) l'ascissa (incognita) di Q e con m la pendenza (incognita) della retta r.
Dalla sezione precedente (Simmetria...) sappiamo che le relazioni fra a, b, x ed m (tenendo presente che l'ordinta b' di Q in questo caso è nulla e che a'=x) sono:

$$-a\,m - x\,m + b = 0$$

$$-x + b\,m + a = 0$$

determiniamo x. Ricaviamo m dalla seconda equazione:

$$m = \frac{x-a}{b}$$

e sostituiamo tale valore nella prima equazione:

$$-\frac{a(x-a)}{b} - \frac{(x-a)x}{b} + b = 0$$

effettuiamo i calcoli per determinare x :

$$-\frac{a(x-a)}{b} - \frac{(x-a)x}{b} + b = 0$$

$$-\frac{x^2}{b} + \frac{a^2}{b} + b = 0$$

$$x^2 = \left(\frac{a^2}{b} + b\right)b$$

$$x^2 = a^2 + b^2$$

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Possiamo già dire a questo punto che il modulo di P = (a,b) è :

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Calcoliamo, visto che ci siamo, anche m (risolvendo quindi il problema della bisezione di cui trattavamo sopra) :

$$m = \frac{x-a}{b}$$

$$m = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{b}$$

questa è la pendenza della bisettrice r, asse della simmetria che porta P in Q.

Il modulo è una funzione disponibile in Mathview:

$$P = (a, b)$$

$$|P| = |(a, b)|$$

$$|P| = \sqrt{\sum_{k=1}^{2} (a, b)_k^{\;2}}$$

$$|P| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

nel nostro caso particolare :

P

$$P = (-3, 4)$$

$$|P|$$

$$|P| = 5$$

Distanza di due punti :

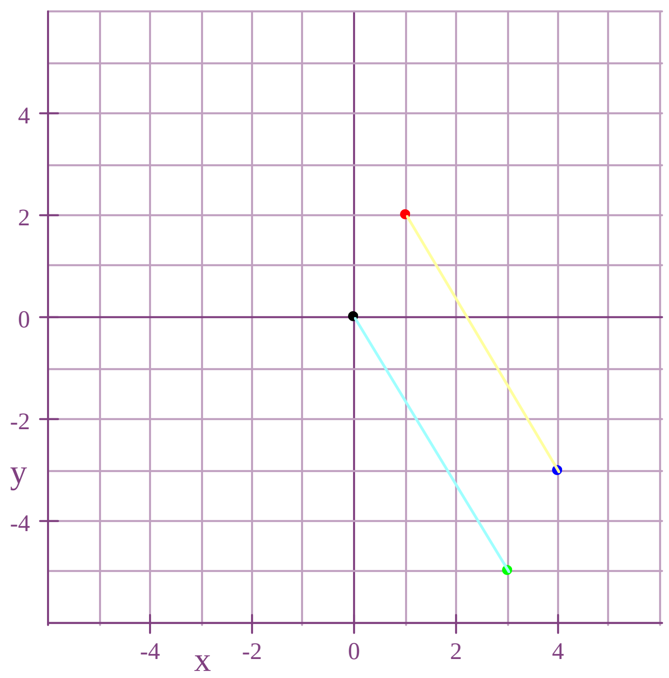
A questo punto, con un po' di inventiva, diventa un giochetto definire la distanza fra due punti P e P'. Guardiamo il seguente grafico:

prendiamo i punti P (in rosso) e P' (in blu) :

$P = (1, 2)$

$P' = (4, -3)$

e rappresentiamo (in verde) il punto P' - P :



Ebbene, vediamo che la distanza fra P e P' è il modulo di P' - P.

Vediamone la formula :

$$| P' - P | = |(x', y') - (x, y)|$$

$$| P' - P | = |(-x + x', -y + y')|$$

$$| P' - P | = \sqrt{(-x + x')^2 + (-y + y')^2}$$

$$| P' - P | = \sqrt{(x' - x)^2 + (-y + y')^2}$$

$$| P' - P | = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

ROTAZIONI INTORNO ALL' ORIGINE (ANGOLI ORIENTATI) NEL PIANO

Nella presente sezione studieremo come è fatta una trasformazione costituita dalla composizione di due simmetrie assiali con assi passanti per l'origine.

Dal momento che una simmetria assiale mantiene fissi i punti del suo asse, la composizione di due simmetrie assiali manterrà fisso il punto che sta su entrambi gli assi di simmetria, ovvero il loro punto di intersezione. Nel caso tali assi passino entrambi per l'origine, tale punto fisso è proprio l'origine.

Passo numero 1: cominciamo componendo due simmetrie di cui la prima sia la più semplice possibile, la simmetria rispetto all'asse delle ascisse.

Quindi prendiamo un punto P :

$P = (2,3)$

applichiamogli la simmetria rispetto all'asse delle ascisse:

$P' = \mathrm{simm}(P, 0)$

$P' = (2, -3)$

e considerando un numero m, applichiamo la simmetria con asse di pendenza m al punto P', ottenendo un punto P" :

$P'' = \mathrm{simm}(P', m)$

La trasformazione composta è P - > P" . Determinarne le equazioni è facile. Infatti basta ricordare che la seconda simmetria ha equazioni :

$x' = H\,x + K\,y$

$y' = K\,x - H\,y$

con :

$H^2 + K^2 = 1$

Nel nostro caso :

$x = P'_1$

$x = 2$

$y = P'_2$

$y = -3$

quindi :

$x' = H\,x + K\,y$

$x' = 2H - 3K$

$y' = K\,x - H\,y$

$y' = 3H + 2K$

Pertanto le formule di tale trasformazione composta, che per il fatto che lascia fissa l'origine chiameremo rotazione intorno all'origine (o "angolo orientato"), sono :

$H^2+K^2=1$

$x' = H\,x - K\,y$

$y' = K\,x + H\,y$

Calcoliamo il corrispondente tramite tale trasformazione del punto P = (1,0):

$x = 1$

$y = 0$

$x' = H\,x - K\,y$

$x' = H$

$y' = K\,x + H\,y$

$y' = K$

Quindi (1,0) -> (H,K) , e tale punto ha modulo uno (per via della relazione sopra data su H e K)

Le formule di sopra valgono anche quando H e K sono i coefficienti della simmetria rispetto all'asse delle ordinate, per il quale essi non provengono da nessun valore della pendenza m.

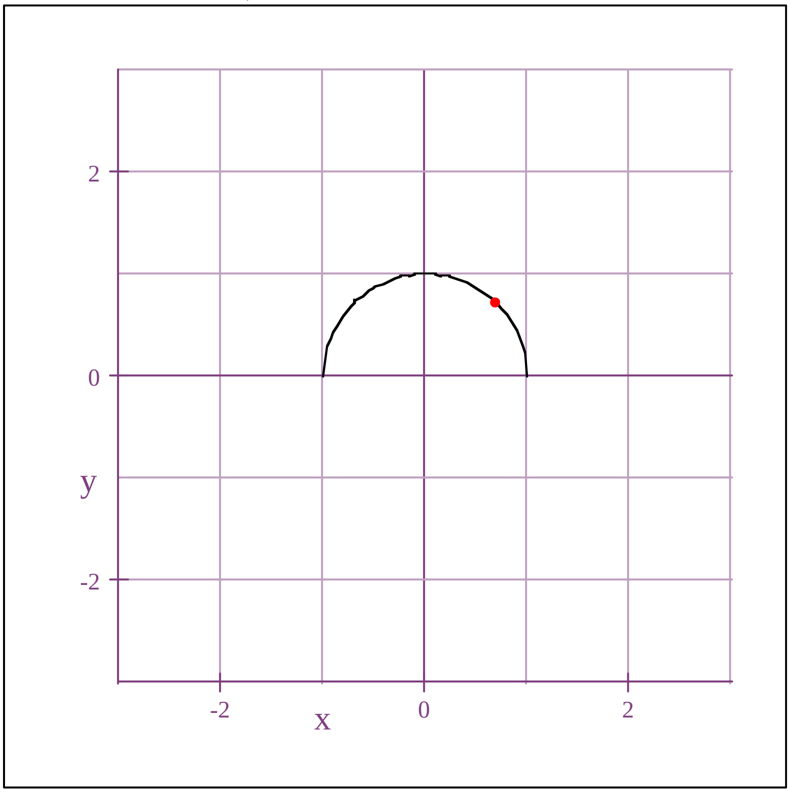
Domanda: Quali sono tali valori di H e K ?

Abbiamo così trovato l'equazione di una rotazione che porta (1,0) in un generico punto (H,K) della circonferenza centrata nell'origine e di raggio unitario. Tale circonferenza prende il nome di "circonferenza goniometrica", appunto per il fatto che ogni suo punto (H,K) dà luogo ad una rotazione nel modo appena esposto. Anzi, per ottenere un punto su tale circonferenza basta assegnare solo uno di tali valori - compreso fra -1 e 1 - e precisare il solo segno dell'altro. Ad esempio basta fissare H (fra -1 e 1) e un numero s che prenda uno dei due valori +1 e -1 :

$H = 0.7$

$s = 1$

Il punto (H,K) è in rosso nel grafico. Cambia H e s, mantenendoli nei rispettivi domini di definizione rispettivamente sopra assegnati, ovvero H fra -1 e 1, estremi compresi, e s solo a valori +1 o -1)



Passo numero 2: Problema: comporre in generale due simmetrie con assi passanti per l'origine, di pendenze rispettivamente m ed m', e determinare quale rotazione, con quale punto (H,K) o coppia (H,s), risulta da tale composizione.

Definizione: i numeri H e K, che individuano completamente una rotazione R, si chiamano rispettivamente "coseno angolare" e "seno angolare" della rotazione R .

Lavoriamo con le rotazioni

Fissa un H fra - 1 e 1 (estremi compresi) e un valore di s che sia 1 o -1:

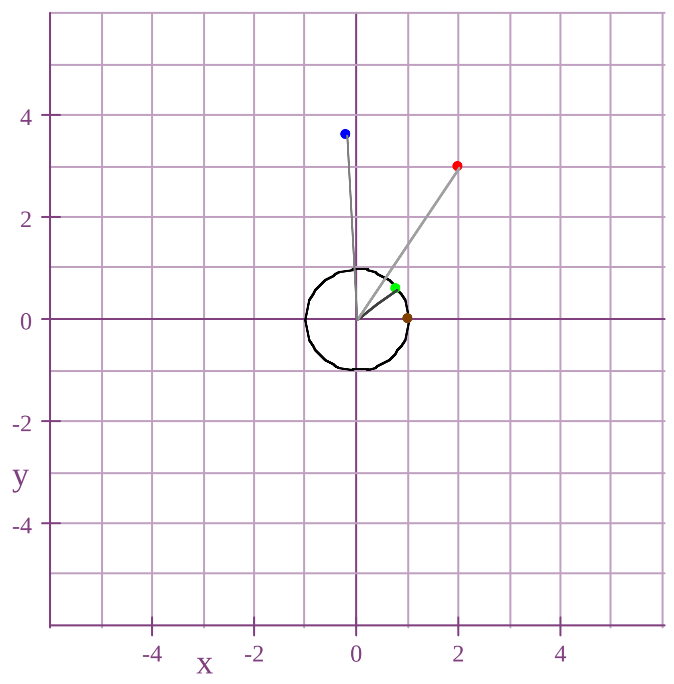
$H = 0.8$

$s = 1$

Prendi un punto P nel piano :

$P = \langle 1,3 \rangle$

Nella figura seguente si vedono P (in rosso), il punto della circonferenza goniometrica che definisce la rotazione (in verde), il punto (1,0) "origine" della rotazione sulla circonferenza goniometrica (in marrone) e il punto Q (in blu) trasformato di P tramite questa rotazione.



Problemi :

Le rotazioni intorno all'origine conservano l'orientamento ? Costruire una figura, riguardo a questo problema, sul modello di quella fornita per le simmetrie assiali.

Dati H e s, provare che la funzione inversa della trasformazione P - > rot(H,s,P) è P - > rot(H, - s,P).

Dati il numero m e il punto P, provare che simm(m,con(P)) = rot(H,segno(m),P), con :

$$H = \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

e segno(x) è il segno di x (+ 1 se x è non negativo, - 1 se x è negativo)

TRASLAZIONI NEL PIANO

Utilizziamo la funzione "traslazione" definita nella sezione funzioni :

$\text{trasl}(a, b, [x, y])$

$\text{trasl}(a, b, [x, y]) = (x + a, y + b)$

Scegliamo dei valori per a e b e un punto P, per costruire un grafico :

$a = 2$

$b = 3$

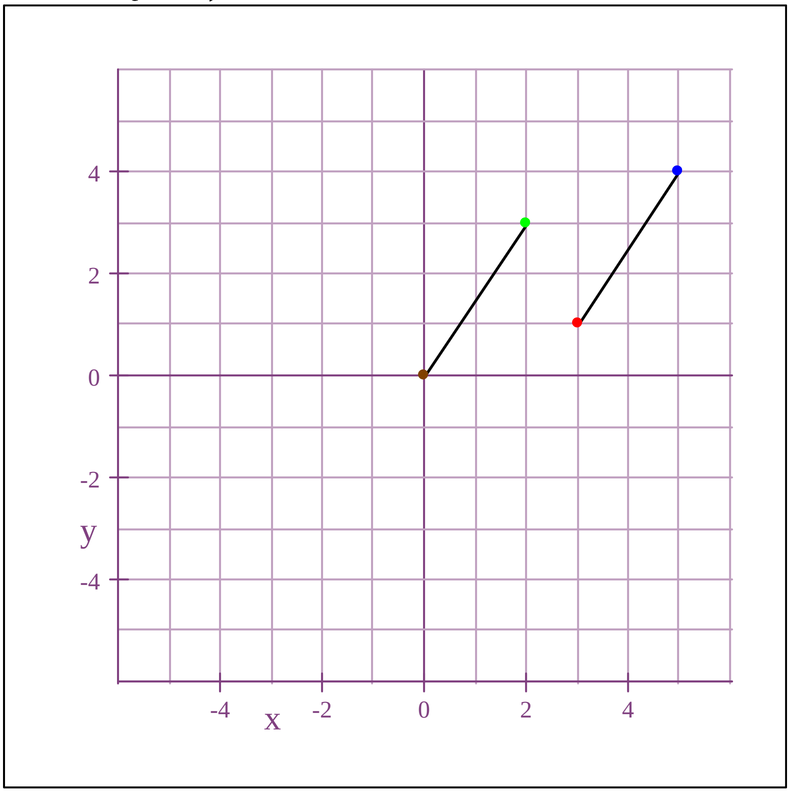
$P = (3, 1)$

prendiamo come x e y le coordinate di P (in rosso nel grafico) e indichiamo con Q il punto (in blu) corrispondente con la funzione trasl ai nostri dati :

$Q = \text{trasl}(a, b, P)$

$Q = (P_1 + a, P_2 + b)$

$Q = (5, 4)$



Domanda : qual è e che ruolo ha il punto verde nella trasformazione P -> Q ?

Problemi :

Una traslazione conserva l'orientamento ?

Dati a e b, qual è l'inversa della traslazione P - > trasl(a,b,P) ?

ISOMETRIE PIANE

In questa sezione ci proponiamo di studiare le composizioni delle rotazioni intorno all'origine con traslazioni (dette rototraslazioni o movimenti o anche isometrie dirette) e le composizioni delle simmetrie con asse passante per l'origine con traslazioni (dette isometrie inverse).

Le trasformazioni composte appena dette sono realizzate dalle funzioni isodir e isoinv della sezione Funzioni.

Vediamole :

isometrie dirette :

$$\mathrm{isodir}(H, s, [a, b], [x, y])$$

$$\mathrm{isodir}(H, s, [a, b], [x, y]) = \mathrm{rot}(H, s, [x, y]) + (a, b)$$

$$\mathrm{isodir}(H, s, [a, b], [x, y]) = \left(H\,x - \sqrt{-H^2+1}\,s\,y, \sqrt{-H^2+1}\,s\,x + H\,y\right) + (a, b)$$

$$\mathrm{isodir}(H, s, [a, b], [x, y]) = \left(H\,x - \sqrt{-H^2+1}\,s\,y + a, \sqrt{-H^2+1}\,s\,x + H\,y + b\right)$$

Prova a scegliere s = 1 oppure s = - 1 fra gli argoment di isodir .

Prova a prendere m pari a "infinito" fra gli argomenti di isoinv .

isometrie inverse :

$$\mathrm{isoinv}(m, [a, b], [x, y])$$

$$\mathrm{isoinv}(m, [a, b], [x, y]) = \mathrm{simm}([x, y], m) + (a, b)$$

$$\mathrm{isoinv}(m, [a, b], [x, y]) = \left(\frac{[-m^2+1]\,x}{m^2+1} + 2\frac{m\,y}{m^2+1}, 2\frac{m\,x}{m^2+1} - \frac{[-m^2+1]\,y}{m^2+1}\right) + (a, b)$$

$$\mathrm{isoinv}(m, [a, b], [x, y]) = \left(\frac{[-m^2+1]\,x}{m^2+1} + 2\frac{m\,y}{m^2+1} + a, 2\frac{m\,x}{m^2+1} - \frac{[-m^2+1]\,y}{m^2+1} + b\right)$$

Isometria è, per definizione, una trasformazione che conserva le distanze (e perciò detta isometrica), ossia che associa a due punti P e Q dei trasformati P' e Q' in modo che la distanza fra P' e Q' sia la stessa di quella fra P e Q.

Le simmetrie con asse passante per l'origine sono, come abbiamo visto, isometriche. Quindi sono isometriche le loro composizioni, ossia le rotazioni intorno all'origine. Siccome anche le traslazioni sono isometriche (provalo !), deduciamo che le isometrie dirette e le isometrie inverse sono isometriche.

Problemi :

Fissati H, s e Q, qual è l'inversa di P - > isodir(H,s,Q,P) ?

Fissati m (eventualmente infinito) e Q, qual è l'inversa di P - > isoinv(m,Q,P) ?

Problema finale :

Dimostrare che le isometrie i tipo isodir e isoinv sono le SOLE isometrie del piano.