

(Matematica:) Formula scitur, "deformulando" discitur; programmi, diagrammi, grammatiche, ma soprattutto decostruzione del prescrittivo.

Gaetano Speranza

Prendendo spunto dall'esame delle principali innovazioni curriculari, per la scuola secondaria di secondo grado, nell'ambito dell'asse matematico, dai relativi programmi ministeriali, nonché da prove e risultati delle valutazioni OCSE-PISA (Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico, "Programme for International Student Assessment"), e confrontando alcuni rilievi didattici di alcuni matematici (Michele Impedovo, Lucio Russo, Paul Lockhart), si esaminano, su esempi concreti, alcuni punti cruciali nell'insegnamento-apprendimento di questa disciplina: la frammentazione e frammentarietà di nozioni presentate e memorizzate in maniera meramente formale, la cristallizzazione dell'attenzione su formule prescrittive di cui non si inquadra la portata e spesso neanche la veicolazione semantica e la strutturazione sintattica, la mancata sinergizzazione di ambiti diversi per consolidare, estendere e consapevolizzare le conoscenze e per pilotare adeguatamente le competenze.

Qualunque programmazione risulta, alla fine, fallimentare se la metodologia di approccio ai contenuti non si ispira alla connessione, alla rappresentazione, alla criticità e alla laboriosità, ovvero - in una sola parola - alla "esplorazione".

E la multimedialità non deve avere il ruolo magico e banalizzante di super-stratagemma di addestramento anabolizzativo, ma quello di mezzo, il più possibile semplice e duttile, personalizzabile e contestualizzabile, di esplorazione e metabolizzazione dei "mathèmata".

(seconda parte della relazione)

Le indicazioni nazionali

Linee generali e competenze

- Conoscenza dei concetti e metodi interni alla disciplina:
 - geometria euclidea del piano e dello spazio
 - calcolo algebrico, geometria analitica, funzioni elementari dell'analisi, calcolo differenziale e integrale
 - strumenti matematici per lo studio dei fenomeni fisici
 - sviluppi della matematica moderna e, in particolare, probabilità e statistica
 - concetto di modello matematico: dalla visione classica a quella della modellistica moderna
 - costruzione e analisi di modelli
 - approccio assiomatico classico e moderno
 - principio di induzione
- Visione storico-critica delle tematiche e rapporti con il contesto filosofico, scientifico e tecnologico
- Pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità

Obiettivi specifici di apprendimento - liceo scientifico e scienze applicate

Primo biennio	Secondo biennio
<p><i>Aritmetica e algebra:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• operazioni con numeri interi e razionali• numeri irrazionali e conoscenza intuitiva dei reali• polinomi, loro divisione con resto, fattorizzazione• calcolo con espressioni letterali• vettori e calcolo matriciale <p><i>Geometria:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• fondamenti della geometria euclidea del piano• teorema di Pitagora• trasformazioni geometriche; teorema di Talete• proprietà della circonferenza• costruzioni geometriche• punti, rette e coniche nel piano cartesiano• funzioni circolari e risoluzione di triangoli <p><i>Relazioni e funzioni:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• $f(x) = ax + b$, $f(x) = ax^2 + bx + c$; equazioni e disequazioni di primo e secondo grado, sistemi lineari in due incognite• $f(x) = x$, $f(x) = a/x$, funzioni lineari a tratti, funzioni circolari• proporzionalità diretta e inversa• rappresentazione delle funzioni (numerica, grafica, funzionale) <p><i>Dati e previsioni:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• rappresentazione e analisi di dati, semplici inferenze• frequenze• valori medi e misure di variabilità• probabilità classica e statistica• concetto di modello matematico <p><i>Elementi di informatica:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• strumenti informatici per oggetti matematici• rappresentazione di dati testuali e multimediali• algoritmi	<p><i>Aritmetica e algebra:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• approfondimenti sui numeri reali• calcolo approssimato• numeri complessi <p><i>Geometria:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• coniche• lunghezza della circonferenza, area del cerchio• luoghi geometrici• geometria euclidea dello spazio <p><i>Relazioni e funzioni:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• numero delle soluzioni delle equazioni polinomiali• successioni, progressioni aritmetiche e geometriche• approfondimenti sulle funzioni elementari dell'analisi, funzione esponenziale e logaritmo• funzioni composte e inverse• studio della velocità di variazione di un processo <p><i>Dati e previsioni:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• distribuzioni doppie condizionate e marginali• deviazione standard, dipendenza, correlazione, regressione• campione• probabilità condizionata e composta• formula di Bayes• calcolo combinatorio <p>Quinto anno</p> <p><i>Geometria:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• lo spazio cartesiano <p><i>Relazioni e funzioni:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• limiti, funzioni continue• derivate, integrali, loro applicazioni• equazioni differenziali e applicazioni, in particolare, alla fisica• problemi di ottimizzazione <p><i>Dati e previsioni:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• distribuzioni di probabilità• costruzione e analisi di modelli

Obiettivi specifici di apprendimento

liceo classico, linguistico, scienze umane, economico-sociale, musicale, artistico

<p>Primo biennio</p> <p><i>Aritmetica e algebra:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• operazioni con numeri interi e razionali• numeri irrazionali e conoscenza intuitiva dei reali• polinomi (esclusa la divisione con resto e la fattorizzazione)• calcolo con espressioni letterali <p><i>Geometria:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• fondamenti della geometria euclidea del piano• teorema di Pitagora• trasformazioni geometriche; teorema di Talete• costruzioni geometriche• punti e rette nel piano cartesiano <p><i>Relazioni e funzioni:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• $f(x) = ax + b$, $f(x) = ax^2 + bx + c$; equazioni e disequazioni di primo grado, sistemi lineari in due incognite• $f(x) = x$, $f(x) = a/x$• proporzionalità diretta e inversa• rappresentazione delle funzioni (numerica, grafica, funzionale) <p><i>Dati e previsioni:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• rappresentazione e analisi di dati, semplici inferenze• frequenze• valori medi e misure di variabilità• probabilità classica e statistica• concetto di modello matematico <p><i>Elementi di informatica:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• strumenti informatici per oggetti matematici• rappresentazione di dati testuali e multimediali• algoritmi	<p>Secondo biennio</p> <p><i>Aritmetica e algebra:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• fattorizzazione di polinomi, divisione con resto• algebra dei vettori• approfondimenti sui numeri reali• calcolo approssimato <p><i>Geometria:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• coniche• circonferenza e cerchio• lunghezza della circonferenza, area del cerchio• luoghi geometrici• geometria euclidea dello spazio <p><i>Relazioni e funzioni:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• funzioni polinomiali, razionali, circolari, esponenziale, logaritmo <p><i>Dati e previsioni:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• distribuzioni doppie condizionate e marginali• deviazione standard, dipendenza, correlazione, regressione• campione• probabilità condizionata e composta• formula di Bayes• calcolo combinatorio <p>Quinto anno</p> <p><i>Geometria:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• lo spazio cartesiano <p><i>Relazioni e funzioni:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• limiti di successioni e funzioni, funzioni continue• derivate, integrali (solo funzioni polinomiali), loro applicazioni• problemi di ottimizzazione <p><i>Dati e previsioni:</i></p> <ul style="list-style-type: none">• distribuzioni di probabilità• costruzione e analisi di modelli
---	---

Le linee guida

per il primo biennio degli Istituti tecnici e professionali

Competenze di base

- Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico rappresentandole anche sotto forma grafica
- Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni
- Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi
- Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico

Risultati di apprendimento

	CONOSCENZE	ABILITÀ
Aritmetica e algebra	<ul style="list-style-type: none">• I numeri: naturali, interi, razionali, sotto forma frazionaria e decimale, irrazionali e, in forma intuitiva, reali; ordinamento e loro rappresentazione su una retta. Le operazioni con i numeri interi e razionali e le loro proprietà.• Potenze e radici. Rapporti e percentuali. Approssimazioni.• Le espressioni letterali e i polinomi. Operazioni con i polinomi.	<ul style="list-style-type: none">• Utilizzare le procedure del calcolo aritmetico (a mente, per iscritto, a macchina) per calcolare espressioni aritmetiche e risolvere problemi; operare con i numeri interi e razionali e valutare l'ordine di grandezza dei risultati. Calcolare semplici espressioni con potenze e radicali. Utilizzare correttamente il concetto di approssimazione.• Padroneggiare l'uso della lettera come mero simbolo e come variabile; eseguire le operazioni con i polinomi; fattorizzare un polinomio.
Geometria	<ul style="list-style-type: none">• Gli enti fondamentali della geometria e il significato dei termini postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione.• Nozioni fondamentali di geometria del piano e dello spazio. Le principali figure del piano e dello spazio.• Il piano euclideo: relazioni tra rette, congruenza di figure, poligoni e loro proprietà. Circonferenza e cerchio. Misura di grandezze; grandezze incommensurabili; perimetro e area dei poligoni. Teoremi di Euclide e di Pitagora.• Teorema di Talete e sue conseguenze. Le principali trasformazioni geometriche e loro invarianti (isometrie e similitudini). Esempi di loro utilizzazione nella dimostrazione di proprietà geometriche.	<ul style="list-style-type: none">• Eseguire costruzioni geometriche elementari utilizzando la riga e il compasso e/o strumenti informatici.• Conoscere e usare misure di grandezze geometriche: perimetro, area e volume delle principali figure geometriche del piano e dello spazio.• Porre, analizzare e risolvere problemi del piano e dello spazio utilizzando le proprietà delle figure geometriche oppure le proprietà di opportune isometrie. Comprendere dimostrazioni e sviluppare semplici catene deduttive.
Relazioni e funzioni	<ul style="list-style-type: none">• Le funzioni e la loro rappresentazione (numerica, funzionale, grafica). Linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa ecc.). Collegamento con il concetto di equazione. Funzioni di vario tipo (lineari, quadratiche, circolari, di proporzionalità diretta e inversa).• Equazioni e disequazioni di primo e secondo grado. Sistemi di equazioni e di disequazioni.• Il metodo delle coordinate: il piano cartesiano. Rappresentazione grafica delle funzioni.	<ul style="list-style-type: none">• Risolvere equazioni e disequazioni di primo e secondo grado; risolvere sistemi di equazioni e disequazioni.• Rappresentare sul piano cartesiano le principali funzioni incontrate. Studiare le funzioni $f(x) = ax + b$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$.• Risolvere problemi che implicano l'uso di funzioni, di equazioni e di sistemi di equazioni anche per via grafica, collegati con altre discipline e situazioni di vita ordinaria, come primo passo verso la modellizzazione matematica.
Dati e previsioni	<ul style="list-style-type: none">• Dati, loro organizzazione e rappresentazione. Distribuzioni delle frequenze a seconda del tipo di carattere e principali rappresentazioni grafiche. Valori medi e misure di variabilità.• Significato della probabilità e sue valutazioni. Semplici spazi (discreti) di probabilità: eventi disgiunti, probabilità composta, eventi indipendenti. Probabilità e frequenza.	<ul style="list-style-type: none">• Raccogliere, organizzare e rappresentare un insieme di dati.• Calcolare i valori medi e alcune misure di variabilità di una distribuzione.• Calcolare la probabilità di eventi elementari.

Le tre I ... Informatica, Inglese ed Impresa

Era un'idea che Berlusconi aveva preso dalla sinistra social-democratica del centro e nord Europa.

Informatica

- "La scuola elementare e media non hanno bisogno di computer, come diceva Silvio Berlusconi anni fa. Il computer è anche troppo usato, oggi, in Italia. Col risultato che ragazzi di tredici anni lo usano meravigliosamente, come un gioco spettacolare, ma non sanno scrivere una lettera in italiano"

(Pietro Citati, critico letterario e saggista, settembre 2008)

- L'occasione perduta della programmazione: la vera utilità dei computer, dalle elementari all'università, avrebbe dovuto essere un'altra: avrebbe potuto permettere agli studenti di apprendere dei concetti importanti di organizzazione del lavoro ed altri concetti, persino più importanti, di scienze cognitive. Ad esempio:

1. La gestione di un'agenda ed una rubrica personale.
2. La gestione di un progetto (project planning e project management).
3. La creazione di un modello concettuale di un problema (OOP - Programmazione orientata agli oggetti - e simili).
4. Tecniche di problem solving.
5. Il "Web semantico" e il "knowledge management".

L'acquisizione di questi concetti, però passa attraverso l'apprendimento delle tecniche di programmazione e la nostra scuola non tenta nemmeno di insegnare ai ragazzi come programmare un computer. Soprattutto, non ci prova alle elementari ed alle medie. Persino alle superiori, solo chi frequenta le scuole tecniche (gli ex-ITIS, per capirci) ha modo di fare questa esperienza (come qualunque altra esperienza di contatto con la realtà in un qualunque laboratorio, d'altra parte).

- Le ambizioni troppo limitate delle nostre scuole le condannano ad un insegnamento tradizionalista, sterile, nozionistico, privo di contatto con la realtà.

«Un insegnamento palesemente inutile, come questo, non può godere del consenso dei ragazzi e quindi si assiste ad una sostanziale "rivolta" degli studenti nei confronti di questa immensa ed ingiustificata perdita di tempo. Una rivolta non espressa in modo compiuto, a livello verbale e razionale, una rivolta vissuta solo in modo infantile e viscerale, ma comunque resa ben visibile dai comportamenti vandalici dei nostri ragazzi.» (Alessandro Bottoni)

- Nel caso specifico dell'informatica, esistono decine di strumenti per insegnare ai ragazzi a programmare, sin dalle elementari. Uno, molto famoso, è Logo, un linguaggio di programmazione "visivo" pensato per i bambini. Questi strumenti vengono usati sin dagli anni '70 nelle scuole di molti altri paesi. Al livello immediatamente successivo, ci sono linguaggi di programmazione estremamente adatti alla didattica, come Python, Ruby, Java, ecc. Non ci sono quindi scuse per non insegnare la programmazione anche da noi. Al contrario si persiste troppo spesso nel concepire l'informatica come addestramento all'uso della cosiddetta Office Automation (pacchetto Office e suoi simili)

Inglese

L'inglese è in una posizione analoga all'informatica. Dovrebbe dimostrare di servire a qualcosa, ma per poterlo fare dovrebbe essere utilizzato per accedere all'immenso patrimonio di informazioni e di materiali ludico/didattici che fanno uso di questa lingua.

(v. CLIL: Content and Language Integrated Learning)

- Nelle nostre scuole si insiste (giustamente) molto su grammatica e pronuncia, ma non si fa nessun uso pratico della lingua. Addirittura, si insiste sulla grammatica in un modo che persino le scuole inglesi ed americane evitano accuratamente perché troppo pesante. In questo modo, l'inglese, lingua vivissima, utilissima ed in continuo mutamento, nell'inconscio dei nostri ragazzi viene accomunata alle lingue morte, come latino e greco, e viene gettata, insieme ad esse, in un unico dimenticatoio.

- Pur insistendo molto sulla grammatica, agendo a un livello alquanto meccanico, non si affrontano adeguatamente le caratteristiche contrastive e comparative della lingua straniera che potrebbero contribuire a una miglior consapevolezza anche della propria lingua madre con ricaduta sulle abilità logiche (linguaggio e logica sono correlati all'area cerebrale di Wernicke).

- La limitazione al solo inglese (per di più in un contesto europeo in cui le nazioni anglofone sono esterne alla cosiddetta "area Schengen") avalla un principio nominalmente internazionalistico che però di fatto risulta essere, a livello più o meno consciamente realizzato e in varia misura socialmente pervasivo e cripticamente persuasivo, neocolonialistico e "neoclionalistico". «Dare a milioni di persone la conoscenza dell'inglese equivale a schiavizzarli» (Gandhi 1908).

Impresa

A parte la collocazione, già esistente in indirizzi scolastici di tipo economico, di discipline relative a tale aspetto commerciale della vita

sociale, e a parte alcune generali ricadute sull'incremento e ottimizzazione di capacità di gestione individuale e sociale, non si comprende il motivo per cui dare enfasi a questo aspetto della vita civile piuttosto che a discipline poco o per nulla approcciate, quali l'educazione civica, l'etnologia/antropologia, la storia delle religioni, e così via.

In definitiva, confrontando le tre "I" con le tre "L" della seguente tabella:

Informatica	Logica
Inglese	Linguaggio
Impresa	Legalità/Lealtà

risulta che, pur essendo in linea di principio possibile che le tre "I" costituiscano delle vie di realizzazione di processi didattici mirati alle tre "L", esse marcano in maniera troppo evidente un territorio culturale decisamente ispirato alla *new economy*, implicante chiaramente più una visione dell'istruzione come addestramento che una di tipo educativo.

Tra l'altro la terza "L" (soprattutto nella sua seconda componente di "lealtà") viene sviluppata nelle nostre scuole, di fatto, letteralmente in senso oppositivo, per via della strutturazione attuale delle fasi di verifica dell'apprendimento. Pletore di testi di docimologia si articolano in elaborazioni e modelli fra i più sofisticati, non tenendo in seppur minima considerazione la fase della "raccolta dei dati", che implicitamente sembrerebbe quasi far riferimento ad un'utopica configurazione in cui, invece di nutriti squadroni di adolescenti iper-energizzati, si sia di fronte a un nucleo ridotto di tranquilli ottuagenari scandinavi. Del resto non va dimenticato che nel nostro paese la sovrapposizione tra "funzionale" e "finzionale" è alquanto cospicua e che per ottemperare a seppur elementari regole di convivenza civile spesso sono necessari strategici automatismi (bigliettini per il rispetto del proprio turno, persino in gelateria e drogheria, incanalamento in corsie zigzagate in tornanti come in stazioni, mense e aeroporti, ecc.) il cui corrispettivo in ambito di valutazione scolastica non è ancora stato escogitato (ci si appoggia solo all'urlo più o meno isterico/perentorio dell'insegnante).

... E veniamo alle "tre C"

« Discuteremo di fini tubature
fino a che il suono di dotte enunciazioni
si farà bolle all'acqua inondatrice »

<i>obiettivi</i>	<i>criteri didattici</i>	<i>criteri epistemici</i>
conoscenze	collegamento	euristica
capacità (abilità)	consequenzialità	enucleazione/esplicitazione
competenze	coerenza	eleganza/economia

Competenza: dal latino "cum petere" ("andare insieme, far convergere in un medesimo punto"; anche nell'accezione di gareggiare o di mirare ad un medesimo obiettivo); cosa l'individuo possiede per "competere" adeguatamente nell'ambiente.

- Nell'ambito delle scienze della formazione o della gestione delle risorse umane è data grande importanza alla contestualizzazione, ovvero al fatto che una competenza è tale se attivata in un contesto specifico.

Guy Le Boterf ritiene la competenza "un insieme, riconosciuto e provato, delle rappresentazioni, conoscenze, capacità e comportamenti mobilitati e combinati in maniera pertinente in un contesto dato".

Rappresentazioni, conoscenze, capacità e comportamenti possono essere riassunti col termine "risorse", portandoci ad affermare che la competenza è una qualità specifica del soggetto: quella di saper combinare diverse risorse, per gestire o affrontare in maniera efficace delle situazioni, in un contesto dato. (Le Boterf, G., 1990, De la compétence: Essai sur un attracteur étrange, Les Ed. de l'Organisation). Rosario Drago (2000), d'altra parte, integra nella sua definizione una considerazione inerente alla percezione delle competenze: "La competenza è essenzialmente ciò che una persona dimostra di saper fare (anche intellettualmente) in modo efficace, in relazione ad un determinato obiettivo, compito o attività in un determinato ambito disciplinare o professionale. Il risultato dimostrabile ed osservabile di questo comportamento competente è la prestazione o la performance". (La nuova maturità - Rosario Drago - Centro studi Erickson).

- In generale il termine competenza indica la capacità degli individui di combinare, in modo autonomo, tacitamente o esplicitamente e in un contesto particolare, i diversi elementi delle conoscenze e delle abilità che possiedono.

Concetti correlati: cognizione, perizia, podestà d'azione di un organo istituzionale, onorario, competenza linguistica, padronanza.

Michele Impedovo: il contenuto dell'insegnamento matematico

- Che cosa è davvero importante del calcolo letterale?

L'enfasi con la quale viene insegnato il calcolo letterale in Italia è eccessiva. Tutte le cosiddette "regole" del calcolo algebrico sono da ricondursi essenzialmente alle caratteristiche della struttura algebrica di campo, e quindi sono tutte riassumibili in poche, semplici proprietà che riguardano le due operazioni fondamentali di addizione e moltiplicazione. Scarsa attenzione viene invece rivolta al concetto di struttura algebrica, che potrebbe costituire il filo conduttore dello sviluppo del calcolo algebrico. Lo spazio tradizionalmente dedicato alle frazioni algebriche è spropositato in rapporto al valore culturale e anche agli obiettivi operativi. Insufficiente e spesso imprecisa è invece l'attenzione rivolta all'anello dei polinomi in una variabile; tale struttura costituisce un contesto fondamentale per gran parte del curriculum di matematica delle scuole medie superiori.

- Calcolo numerico e calcolo simbolico: nuove prospettive per il curriculum di matematica

Ricette di cucina: l'insegnamento attuale della matematica in Italia privilegia il calcolo simbolico: lo testimoniano la storica ed eccessiva abbondanza di calcolo letterale a partire dalla scuola media, la moltitudine di espedienti per la fattorizzazione dei polinomi (a coefficienti in Z ? in Q ? in R ? mah?!), i metodi artificiosi per risolvere equazioni particolarissime, gli innumerevoli "schemi" per le disequazioni, la "regola" di Ruffini, le "formule" di trigonometria e la "riduzione al primo quadrante", le regole di derivazione e soprattutto di integrazione e chissà quant'altro. Può capitare di seguire un intero corso di trigonometria senza vedere l'approssimazione in radianti di un solo angolo; può capitare di seguire un intero corso di analisi senza vedere un numero decimale. Questo tentativo di esaurire le potenzialità del calcolo simbolico ha innanzitutto condotto a un tipico errore didattico: privilegiare l'aspetto sintattico degli oggetti matematici trascurando il loro significato. Tale errore si è consolidato a tutti i livelli scolastici fino all'Università ma ha certamente prodotto i guasti maggiori nella scuola dell'obbligo, in cui molti insegnanti (tipicamente i non laureati in matematica) hanno scambiato l'insegnamento della matematica per un prontuario di "regole" e "formule" (le famigerate "ricette" del buon Croce). A queste tecniche di calcolo si aggrappano soprattutto gli alunni più deboli i quali, in assenza di significati riconosciuti, si accontentano di apprendere sequenze finite e ordinate di istruzioni. La scarsa spendibilità culturale di queste conoscenze è ben nota.

Lucio Russo: il senso e l'utile del sapere (matematico)

- Segmenti e bastoncini; dove sta andando la scuola?

Si affronta, in maniera ironica e tagliente, il delicato tema della pianificazione dei programmi scolastici, in particolare facendo riferimento alla "riforma della scuola" (in particolar modo quella superiore) che da lunghi anni ormai va trascinandosi dolorosamente a livello politico. I problemi che Russo solleva sono importanti e, per certi versi, illuminanti, e sono quelli di una scuola italiana che cerca di uniformarsi ad un fallimentare sistema deconcettualizzato di matrice statunitense e anglosassone, impoverito di una serie di importati valori considerati "fuori moda" o "troppo difficili" per gli studenti moderni, ai quali si preferisce fornire un'educazione "alternativa". Un problema chiave viene sollevato dall'autore: in materia di programmi scolastici non si può decidere unilateralmente a livello politico, ma vanno coinvolte in una discussione coerente ed articolata i vari protagonisti, dagli insegnanti, agli studiosi, ai ricercatori, agli intellettuali, agli scienziati.

- La cultura componibile; dalla frammentazione alla disgregazione del sapere

L'agile libretto contiene una riflessione, basata anche su ricordi personali relativi a un complesso itinerario culturale, sulla necessità di superare lo specialismo per tentare di costruire un generalismo che eviti la superficialità e, allo stesso tempo, sulle difficoltà incontrate da chi si pone oggi un tale obiettivo. Il superamento dei confini disciplinari, che è spesso essenziale anche per risolvere problemi sorti all'interno di singoli settori ed è inevitabile da parte di chi svolge un lavoro intellettuale con passione, richiede infatti non solo l'impiego di molte energie intellettuali, ma anche il superamento di ostacoli, oggettivi e soggettivi, creati dalle attuali strutture teoriche e organizzative del mondo della conoscenza. Il problema è illustrato descrivendo i rapporti, essenziali ma difficili, tra fisici e matematici, matematici puri e matematici applicati, storici della scienza e scienziati, filologi classici e storici della scienza antica. Ci si sofferma in particolare sui danni prodotti dalla crescente divaricazione tra scienza pura e applicata e dall'indebolimento della memoria storica degli scienziati. Si argomenta contro la pseudo-soluzione, sempre riproposta, di creare nuove specializzazioni negli interstizi di quelle esistenti. Il superamento di un angusto specialismo è reso sempre più arduo non solo dalla crescita esponenziale delle informazioni disponibili non accompagnata da una crescita altrettanto veloce di nuove sintesi, ma anche dall'evoluzione del sistema educativo occidentale che, spostando la serietà degli studi a livelli sempre più elevati di età e di specializzazione, ha prodotto un continuo indebolimento della cultura generale condivisa.

Paul Lockhart :
non-senso della prassi e liberazione dall'ossessione dell'utile

Contro l'ora di matematica. Un manifesto per la liberazione di professori e studenti (Titolo originale: A Mathematician's Lament)

Se ci si concentra sul che cosa, e si trascurava il perché, la matematica si riduce a un guscio vuoto. La matematica è l'arte della spiegazione. Se si nega agli studenti l'opportunità di porsi i propri problemi, elaborare le proprie congetture e le proprie scoperte, sbagliare, essere creativamente frustrati, avere un'ispirazione, si nega loro la matematica stessa." L'autore, insegnante di matematica, spiega in questo appassionato e appassionante pamphlet che occorre restituire alla matematica il suo lato creativo e giocoso, riscoprire e trasmettere ai ragazzi lo slancio immaginativo e la sfida mentale che da sempre anima i matematici, perché "non c'è nulla di così onirico e poetico, nulla di così radicale e sovversivo, e psichedelico, quanto la matematica.

- La questione fondamentale, comunque, non è se la matematica abbia un valore pratico: a me non importa se ce l'ha oppure no. Tutto quello che sto dicendo è che non abbiamo bisogno di giustificarla su quella base. Stiamo parlando in un'attività della mente umana che è totalmente innocente e incantevole, di un dialogo tra noi e le nostre capacità mentali. La matematica non necessita di patetici pretesti industriali o tecnologici. Trascende tutte quelle considerazioni mondane. Il valore della matematica sta nel fatto che è divertente e sorprendente e che ci dà grande gioia (oltretutto gratis!). Dire che la matematica è importante perché è utile è come affermare che i figli sono importanti perché possiamo addestrarli a fare un lavoro insignificante così che accrescano i profitti delle multinazionali. O forse è davvero questo che stiamo dicendo?

- Ecco in che cosa consiste la matematica. Non sto dicendo che sia di importanza vitale; non lo è. Non sto dicendo che curerà il cancro; non lo farà. Sto dicendo che è divertente e che mi fa sentire bene. E in più è perfettamente innocua. E di quante attività umane è possibile dire questo?

- Immagino che per me questa sia una componente davvero fondamentale: voglio essere cambiato. Voglio essere condizionato in modo profondo. Forse è la ragione più importante per la quale faccio matematica. Nulla che io abbia visto o fatto in vita mia si avvicina ad avere il potere trasformante della matematica.

- La sola ragione per cui sono interessato alla matematica è divertirmi e

aiutare la gente a divertirsi. E per quanto mi sforzi non riesco a immaginare un obiettivo più degno. Nasciamo tutti in questo mondo, e prima o poi moriremo e sarà tutto finito. Nel frattempo, godiamoci la nostra mente e le cose meravigliose e buffe che ci possiamo fare. Non so voi, ma io sono qui per spassarmela.

- Insegnare non significa fornire informazioni. Vuol dire avere un rapporto intellettuale onesto con i propri allievi. Non richiede metodi, né strumenti, né una preparazione specifica, ma solo la capacità di essere autentici. E, se non si è in grado di essere autentici, non si ha il diritto di disturbare dei ragazzini innocenti con la propria incapacità.

- La matematica non significa eseguire delle istruzioni: vuol dire creare istruzioni nuove. La matematica è l'arte della spiegazione. In matematica le cose sono ciò che desideriamo siano.

“Se vuoi costruire una nave,
non radunare uomini per raccogliere il legno,
distribuire i compiti e suddividere il lavoro,
ma insegna alla gente la nostalgia del mare infinito”.
[Antoine de Saint-Exupéry]

“Il miglior modo di conoscere è assaggiare”.
[detto SUFI]

“la verità vi farà liberi”.
[Gv 8,32]

“Dai loro frutti li riconoscerete” (Mt 7,16): quel che alla fin fine vediamo intorno è che più si misura la "hominitas" più si usura la "humanitas".

"Pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità":
collegare concetti, non linkare fatti; spiegare, non addestrare.

Didattica contenutistica ("acculturale"): ricerca tramite la quale il docente, alla luce del suo trascorso esperienziale di discente e delle continue sollecitazioni culturali e relazionali ascritte alla sua funzione, disolve ed estrinseca collegamenti tra idee, processi, rappresentazioni e impostazioni esplicative.

Reazione (al libro di Lockhart) di una prof di matematica (da facebook):

Ho letto l'articolo del matematico "più che impertinente" Lockhart, e dissento su parecchie cose, in particolare sul fatto che le lezioni si improvvisano, non esistono metodi di insegnamento e sul non ultimo e molto moderno concetto che a scuola ci si deve divertire.

Mia risposta (su facebook):

Probabilmente ogni posizione, se considerata come paradigmatica, scade in quella "viziosità" tipica dell'istituzionalizzazione (cosa forse ascrivibile alla rigidità di uno stato cristallino anche in contesti non mineralogici). Se si intendono le frasi su riportate come l'aver l'opportuno piglio per feedback imprevedibili durante l'interazione didattica (il che è l'occasione primaria per la fuoriuscita di quell'autenticità che la teoria didattica propugna), come il non considerare vincente ("via regia", citando Euclide) nessuna tra le metodologie più o meno accademicamente canonizzate - e soprattutto non trasportabile in ogni situazione sic et simpliciter - e, infine, come il cercar di comunicare e condividere il piacere dell'esplorazione, non diventano così arlecchino-pulcinella-lucignolesche le aspirazioni di cui scrive Lockhart, e vanno in direzioni coerenti con le posizioni di sommi matematici del passato lontano e recente. Il pregio principale che ho trovato nel libro di Lockhart è il riferimento ai concreti contenuti matematici (troppo spesso mi capita di vedere specialisticissime dissertazioni pedagogiche che astraggono quasi totalmente dai contenuti, cozzando con libri di testo formalmente teutonicamente ispirati a tali standard, ma nell'incarnazione della materia matematica incoerenti, obsoleti e spesso pure errati. E', d'altronde, pur vero che dall'errore nasce lo stimolo al miglioramento, purché si chiarifichi che una parte non indifferente della didattica dovrebbe consistere nella componente epistemologica delle discipline, quella in cui si chiariscono anche ai docenti (prima e oltre che ai discenti) idee, collegamenti e inquadramenti che possano rendere una naturale metabolizzabilità intellettuale alla frammentarietà di elenchi di fatti e formule.

Euristica, enucleazione, eleganza: qualche esempio concreto

- Le operazioni elementari di addizione e moltiplicazione sono, nella loro interpretazione geometrica (v. La mia relazione al corso IX ASIS: Del "più" e del "per": dal "far di conto" al "vedere in calcolo"; l'introduzione combinata di algebra e geometria), alla base della geometria piana, nonché della grafica computerizzata.

- Il numero di Nepero, pendenza (velocità) e funzioni esponenziali.

Il numero "e" è quasi sempre, nei testi scolastici, catapultato nei capitoli sulle funzioni esponenziali in una maniera "Marchesiniana" (mi riferisco alla stupenda Anna Marchesini), ossia come un "sto grosso personaggio" la cui carta d'identità si preannuncia svelabile solo in futuro, nel corso di analisi infinitesimale. Quando poi arriva il famigerato corso di analisi infinitesimale il numero "e" si trova al centro di formule e calcolacci che rischiano pesantemente di nascondere la sua natura (pur se la carta d'identità la presentano), che è quella di essere la base di quella funzione esponenziale che passa, come tutte le altre, per il punto (0,1), ma che ci passa con pendenza 1, il che poi permette di esprimere tutte le altre funzioni esponenziali come stiramenti orizzontali di e^x , ossia come e^{kx} , il che tira fuori anche la naturale entrata in scena del logaritmo naturale: infatti il logaritmo naturale di a, ovvero $k = \ln(a)$, è la pendenza nel punto (0,1) della funzione $y = a^x = e^{kx}$.

- Vettori, matrici, determinanti, aree e teorema di Pitagora.

I fondamenti dell'algebra lineare, in barba al loro blasone di "fondamentalità", vengono scaricati nei libri di testo - dopo una doverosa enunciazione, costituzionale quanto arcana, degli assiomi di spazio vettoriale - come una bizantinoidale netturbistica smatassata di matrici su matrici, con salti mortali tipografico-vignettistici per rendere meno eclatante l'impulso onnicida che scaturisce nel lettore fin dal primo sguardo a tali pagine (peraltro non poche, visto che ogni matrice occupa spazio). Tale impulso è poi inevitabile quando si tira fuori il determinante con un procedimento che è - a dir poco - bizantinoidale. Perché non partire dall'esigenza, elementarissima, di formalizzare il concetto di area nel piano! Ce ne fosse uno, tra i volumi scolastici che mi sono capitati sott'occhio, che parte da una calma (anche tipografica) analisi nel piano di tale concetto per arrivare al determinante di una matrice 2x2 come area orientata nel piano orientato, magari con l'applicazione (carinissima) del calcolo dell'area di un poligono tramite la formula del "laccio di scarpa" e, soprattutto, con una giustificazione del metodo di Cramer basato sulle proprietà multilineare e alternante del determinante. Il significato geometrico del determinante vien fuori solo a fine esposizione, insieme a un catapultamento del prodotto vettoriale ispirato allo stesso principio del "deus ex machina".

Secondo autorevoli opinioni, il metodo più didatticamente semplice

coincide, in fin dei conti, con quello scientificamente più rigoroso. Una volta introdotta così l'area, diventa immediato il teorema di Pitagora, calcolando l'area del quadrato formato da un vettore a e dal suo ortonormale $\text{ort}(a) = (-a_y, a_x)$.

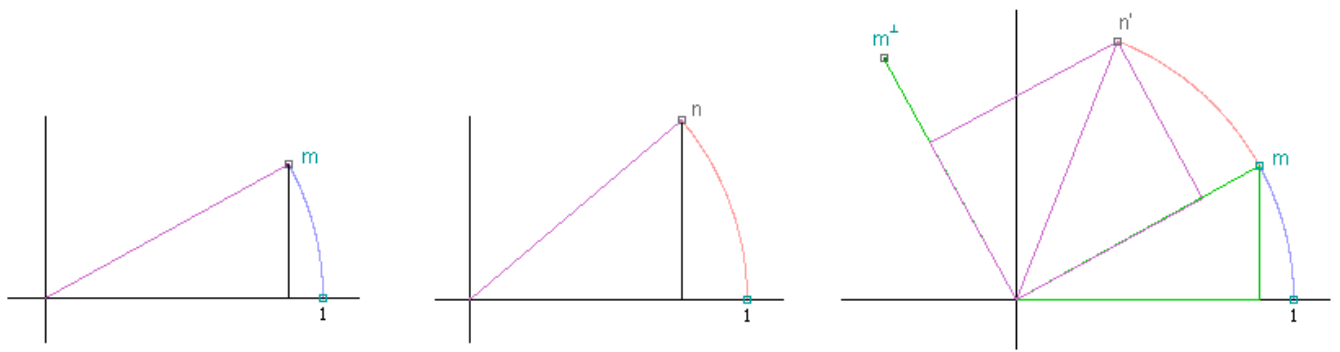
- Vettori, prodotti, goniometria.

I prodotti scalare e vettoriale, detti anche rispettivamente interno ed esterno, sono un altro punto interessante nella indagine sulle dis-nucleazioni didattiche nelle trattazioni correnti a livello scolastico. Anche tali tipi di prodotto possono essere proficuamente introdotti entrambi (e sinergicamente l'uno rispetto all'altro) sin dal livello bidimensionale della geometria analitica piana. In effetti il prodotto vettoriale, o esterno, nel piano non è altro che il determinante di due vettori. Il punto da focalizzare è che, dati due vettori u e v , possiamo proiettare il secondo, ossia v , o sul primo, ossia u , o sull'ortonormale antiorario del primo, che è $u^\perp = \text{ort}(u) = (-y_u, x_u)$. Nel primo caso la proiezione è "interna" a u , mentre nel secondo caso la proiezione è "esterna" ad u , in quanto è sul suo perpendicolare. Se moltiplichiamo ognuna di tali proiezioni per la lunghezza di u stesso abbiamo rispettivamente i prodotti interno (alias scalare) ed esterno (alias vettoriale). Il secondo è esattamente il prodotto della base $|u|$ per l'altezza del parallelogramma costruito su u e v , presa positivamente se essa è concorde a $\text{ort}(u)$ o se no negativamente; quindi è appunto l'area con segno, ovvero il determinante $\det(u,v)$. Se u e v sono unitari - e magari si prende u proprio come il vettore 1 , cioè $u=(1,0)$ - allora i due prodotti forniscono proprio il coseno e il seno dell'angolo (orientato) $\langle u,v \rangle$ (angolo che in definitiva non è altro che la rotazione che porta u in v). La "vettorialità" del prodotto vettoriale è evidenziabile se, uscendo dal piano, visualizziamo l'area con segno con un vettore che è ortogonale al piano stesso (per così dire "esce perpendicolarmente dalla lavagna"). Una tale trattazione per di più giustifica anche le nomenclature, il che è importante per la comprensione - e non solo come plusvalore - in ogni disciplina homo-sapiens-sapienziale.

L'addizione goniometrica: nella maggior parte dei testi scolastici le formule goniometriche di addizione vengono ricavate in maniera alquanto indiretta, tramite l'introduzione delle formule goniometriche di sottrazione (e successivamente cambiando il segno del sottraendo e utilizzando le formule goniometriche di opposizione), o sfruttando il calcolo della distanza tra due punti, applicato a corde della circonferenza goniometrica o mediante il calcolo vettoriale, nel qual caso, in genere, si sfruttano le proprietà del prodotto scalare tra vettori, che pertanto sono da dimostrare propedeuticamente (assieme, ovviamente, alla previa introduzione del prodotto scalare).

Eppure la determinazione diretta delle formule di addizione tramite l'uso dei vettori sarebbe cosa ben più immediata ed elegante sfruttando semplicemente la combinazione lineare di vettori e l'idea di associare ad ogni vettore nel piano cartesiano il suo "vettore ortonormale diretto (o

antiorario)".



La definizione della operazione di addizione angolare si realizza partendo da due angoli $\alpha = 1^m$ e $\beta = 1^n$ e determinando il punto n' che ha rispetto a m e all'ortonormale diretto di m [ovvero $\text{ort}(m) = (-y_m, x_m)$] le stesse componenti che n ha rispetto ad 1 e all'ortonormale diretto di $1=(1,0)$ [ossia $\text{ort}(1) = (0,1)$].

Pertanto:

$$n' = x_n m + y_n \text{ort}(m) = x_n(x_m, y_m) + y_n(-y_m, x_m) = (x_n x_m - y_n y_m, x_n y_m + y_n x_m).$$

Le formule di addizione goniometrica seguono quindi immediatamente da:

$$\cos(\alpha) = x_m, \quad \sin(\alpha) = y_m,$$

$$\cos(\beta) = x_n, \quad \sin(\beta) = y_n,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = x_{n'}, \quad \sin(\alpha + \beta) = y_{n'} \quad (\text{in quanto } \alpha + \beta = 1^{n'}).$$

L'uso dell'operatore di "ortonormalità", oltre a questa semplificazione sia concettuale sia operativa in campo goniometrico, permette in generale di semplificare notevolmente, a mio parere rendendole concettualmente molto "lineari", le trattazioni trasformazionali del piano cartesiano.

- I numeri immaginari, ... inimmaginabilmente immaginifici !

Un cammino che da somma e prodotto, procedendo per la via delle "progressioni", arriva a esponenziali, spirali, circonferenze e goniometria. Spesso accade in disegno che per poter portare a termine una costruzione mirata a costruire entità grafiche che stanno tutte su una retta, è necessario uscire da tale retta per utilizzare una ulteriore dimensione. Allo stesso modo accade per i numeri reali (quelli che usiamo per le misurazioni), per poter studiare adeguatamente e graficamente i quali è necessario introdurre un punto che stia al di fuori del loro insieme. Tale elemento viene chiamato in matematica "unità immaginaria", indicato con "i", ed è usualmente collocato graficamente in una posizione che forma con i punti 0 e 1 un triangolo $0,1,i$ avente la forma di mezzo quadrato la cui diagonale congiunge 1 ad i in un verso che, per un ideale osservatore posto coi piedi in 0 e la testa verso noi che guardiamo il quadrato, va da

destra a sinistra. Tale configurazione di $0,1,i$ è infatti detta "levogira" o "sinistrorsa". In questo modo nasce il cosiddetto riferimento cartesiano piano, base di tutta la geometria analitica piana. Tutti i punti del piano possono essere considerati come vettori che partono da 0 (così come in un righello i punti sono le tacche o equivalentemente gli intervalli fra 0 e le tacche). I vettori possono essere sommati e ogni vettore ha un suo opposto. La semiretta congiungente 0 (come punto di partenza) con 1 è il "verso positivo" e la retta congiungente 0 con 1 è l'asse delle ascisse ed è costituita dai cosiddetti numeri reali. La semiretta costituita dagli opposti dei punti del "verso positivo" è il "verso negativo" e non è altro che la semiretta che parte da 0 e passa per -1 (opposto di 1). In questo contesto si possono svolgere graficamente le operazioni "lineari" (addizione di due punti/vettori e moltiplicazione di un numero reale per un punto/vettore). In tal modo ogni punto/vettore z del piano diventa una "combinazione lineare" $z=x\cdot 1+y\cdot i=x+y\cdot i$ (numero "complesso"). Inoltre tutti i prodotti di numeri reali per l'unità immaginaria forniscono l'asse immaginario, o asse delle ordinate. Successivamente è possibile individuare delle trasformazioni fondamentali ottenibili per cambiamento di segno alla x o alla y o per scambio della x con la y . Di queste, le due trasformazioni "clou" sono la coniugazione $z=x+yi \rightarrow \bar{z} = \text{conj}(z) = x-yi$ (simmetria assiale rispetto all'asse reale) e la "ortonormalità diretta" $z=x+yi \rightarrow z^\perp = \text{ort}(z) = -y+xi$ (rotazione di un quadrante in senso antiorario). Il ruolo di tali due trasformazioni è cruciale, in quanto l'ortonormalità consente di definire la moltiplicazione in generale di due numeri complessi: $(a+bi)\cdot z=az+bz^\perp$, ossia il prodotto di $a+bi$ per z è quel punto/vettore che si realizza tramite z così come $a+bi=a1+a1^\perp$ si realizza a partire da 1. Il prodotto per z è visualizzabile geometricamente come una "omotetia" (=uguale disposizione) H_z in cui ad ogni punto $a+bi$ corrisponde un punto $H_z(a+bi)$ realizzato allo stesso modo ma con una nuova "unità" data da z . Tale omotetia H_z diventa una rotazione quando porta \bar{z} (il coniugato di z) in 1, ossia $H_z(\bar{z})=1$, il che significa $(x+yi)(x-yi)=1$, il che equivale a dire $x(x-yi)+y(x-yi)^\perp=1$, ossia $x(x-yi)+y(y+xi)=1$, ossia $x^2+y^2=1$ (si ritrova quindi per via trasformativa il teorema di Pitagora). Tale moltiplicazione consente inoltre di algebrizzare il concetto di similitudine, in quanto un triangolo $0,1,p$ è simile al triangolo $0,z,p\cdot z$. Inoltre una progressione aritmetica con elemento iniziale 0 e ragione d , nel contesto dei numeri complessi, è una successione di punti disposti, in maniera equidistanziata di d , su una retta passante per l'origine, mentre una progressione geometrica con elemento iniziale 1 e ragione q è una successione a spirale di punti/vettori ottenuta tramite triangoli, partendo dal triangolo $0,1,q$ e costruendo successivamente triangoli ognuno simile al precedente ($0,1,q$; $0,q,q^2$; $0,q^2,q^3$; ...). Il culmine di tutto questo si realizza con la formula di Eulero per i numeri immaginari, che realizza l'avvolgimento del segmento compreso tra 1 e $1+t\cdot i$ sull'arco di circonferenza goniometrica compreso tra 1 e $\cos(t)+i\cdot \sin(t) = \lim_{n\rightarrow\infty}(1+i\cdot t/n)^n = \exp(i\cdot t) = e^{i\cdot t}$.

"Tra una retta e una spirale c'è di mezzo l'esponenziale".

~ conclusione ~



L'esplorazione matematica, con l'enucleazione relazionale che ne consegue, è un'operazione analoga a quella della "ingegneria inversa" (RE - Reverse Engineering), il processo inverso della progettazione industriale, che consente di ottenere i dati di progetto dal prodotto anziché ottenere il prodotto dal progetto.

L'ingegneria inversa consente, partendo da un oggetto reale, di risalire alla sua descrizione matematica attraverso il rilievo di una nuvola di punti sulla superficie di tale oggetto o di immagini rappresentative delle sue sezioni, così come la "deformulazione", in chimica, è il concetto dell'analizzare un prodotto chimico formulato e del separare nei suoi componenti costitutivi e di identificare ogni ingrediente e la quantità della sua presenza, in modo che il risultato finale è una "ricetta" per il prodotto.

In matematica ciò si presenta addirittura a un livello più profondo di quello rappresentativo e di quello quantitativo, e cioè al livello conoscitivo per cui l'oggetto matematico nel contempo "afferra" porzioni salienti di un aggregato percettuale (l'oggetto empirico, quello dell'esperienza percettiva), permettendo di apprendere riguardo ad esso, e al tempo stesso diventa, in quanto oggetto astratto, fulcro di collegamento (per analogia o per contrasto) con altri oggetti matematici. In definitiva, esso, il "màthema", diventa chiave informativa e in-formativa di comprensione e con-prensione, decodifica il frammentario e lo ricodifica in maniera rielaborabile simbolicamente e reinterpretabile a un livello più approfondito di consapevolezza.

Per illustrare con un flash iconico la cosa, basta pensare a come la memorizzazione di una successione di simboli strani possa essere resa facile mediandola tramite una semplice (seppur magari non immediata) informazione strutturale (una "spiegazione").

E' pur vero che tramite la formula, il "màthema", si possiede il potere conoscitivo, ma è attraverso la sua deformulazione, la sua scomposizione conoscitiva e la decostruzione della sua asettica immobile e impassibile prescrittività, che si apprende.

Non a caso la radice sanscrita MATH/MANTH corrisponde al significato di "scuotere", "agitare".