IL COSMO DIGITALE
ovvero : IL TAO DELLA MATEMATICA

Gaetano Speranza

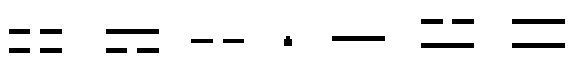
Fra le potenze del numero 2 che hanno destato, nel corso della storia del pensiero, particolare suggestione speculativa, le prime tre, quelle rientranti nella decina, hanno rivestito un ruolo di primo piano nella descrizione generale, e quindi per certi versi generica, del mondo, intendendo tale termine come punto d'incontro di astrazione a posteriori dal percepito e di costruzione a priori del concepito ; quindi di un mondo mentale, legato in modo più o meno esplicitabile, e diversificatamente esplicitato, al mondo "pratico", quello dei "fatti".

Le potenze in questione sono 1, 2 e 4 (corrispondenti rispettivamente alle dimensioni dei sistemi numerici reale, complesso, quaternionico, per cui vale l'associatività moltiplicativa oltre a quella additiva). Le prime uguaglianze esprimenti che i numeri 1 e 2 sono le potenze di 2, rispettivamente di esponenti 0 e 1, costituiscono un sistema chiuso, utilizzante solo per l'appunto i numeri 0,1,2. Possiamo indicare tale aggregato numerico con un simbolismo che esprima che i suddetti elementi riuniti costituiscano una nuova individualità, seppur di tipo collettivo, ossia quel che si chiama un insieme: {0,1,2}. Togliendo a tale insieme degli elementi si ottengono dei possibili sottoinsiemi, di cui il più piccolo è quello senza elementi, cioè {} , detto l'insieme "vuoto". Ebbene è dal vuoto che si parte, e lo zero è proprio definito nel nostro mondo mentale come il vuoto, l'insieme vuoto: 0 = {} . Partendo da zero possiamo in primo luogo costruire un insieme con un solo elemento (lo zero, per l'appunto), e questa sarà una buona definizione del numero 1 : 1 = {0}. L'insieme vuoto "è" qualcosa. E siamo così a due entità, lo zero e l'uno. E da "due" a "2" il passo è breve quanto obbligato : 2 = {0,1} che vuol dire {0,{0}}. Il procedimento seguito, detto ricorsivo perchè per ottenere una nuova entità si ricorre a entità dello stesso tipo che siano già state introdotte, serve per procedere a 3 = {0,1,2} = {0, {0}, {0,{0}} } , 4 = {0,1,2,3} = {0, {0} ,{0, {0}} , {0,{0},{0,{0}}} } e agli altri consimili "draghi del vuoto". Le parentesi e la virgola (quest'ultima, peraltro, non indispensabile) strutturano, gerarchizzano il nulla. Si costruisce una forma tratta dal nulla, senza "sub -stantia". Da notare che nelle stringhe su scritte il simbolo 0 è sostituibile con {} .

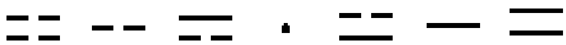
Adesso gli "ingredienti" di cui trattavamo prima sono provvisti di carta d'identità: 0, 1={0}, 2={0,1}. E' l'operazione di elevamento a potenza che deve essere introdotta. La via usuale passa a definire l'addizione di numeri, la moltiplicazione come iterazione di addizioni e l'elevamento a potenza come iterazione di moltiplicazioni. Un'altra strada si fonda su un'altra operazione, quella di associazione ordinata. Quando, partendo da due entità a e b si considera l'insieme $\{a,b\}$, si fa una "associazione", ma non è definito il posto, il ruolo di ognuno degli elementi nell'ambito di tale insieme, ossia i due elementi si pongono alla stessa maniera in rapporto a tale insieme, non si può distinguere un primo o un secondo insieme al di dentro di $\{a,b\}=\{b,a\}$. Ma la "gerarchia" fa l'ordine, e nella struttura più complessa $\{ \{a\} , \{a,b\} \}$ i ruoli di a e di b sono distinti : a è quello dei due che compare due volte, b quello che figura una volta sola, sempre che questi due elementi siano distinti cioè che non sia $a = b$. Associando ordinatamente così i due elementi, possiamo introdurre una notazione più maneggevole: $(a,b) = \{a,\{a,b\}\}$ e attribuire convenzionalmente ad a il ruolo di primo elemento nell'associazione ordinata. L'entità (a,b) è denominata "coppia ordinata" . Questo modo di associare può essere inteso come "far corrispondere", nel senso che al primo elemento di una coppia ordinata corrisponde il secondo elemento della stessa. Ad esempio la corrispondenza che associa ai numeri 2,4,7 rispettivamente il numero delle lettere delle parole "due", "quattro", "sette", cioè 3,7,5 è indicata come insieme di coppie ordinate : {(2,3), (4,7), (7,5)} . E' per questo che un insieme di coppie ordinate viene denominato corrispondenza o anche relazione. Una corrispondenza si dice univoca quando ad un primo elemento non possono corrispondere più elementi, ossia quando nella corrispondenza stessa non ci sono coppie differenti aventi tutte lo stesso primo elemento. Una corrispondenza univoca si chiama "funzione". La corrispondenza di sopra è una funzione. L'insieme dei primi elementi associati in una funzione, in questo caso {2,4,7}, è detto "dominio" della funzione, mentre l'insieme dei secondi elementi delle coppie di una funzione, in questo caso {3,7,5}, è detto "codominio" della funzione. Se diamo un nome alla funzione su considerata, ad esempio la indichiamo con f, possiamo ottenere gli elementi del codominio "in funzione" di quelli del dominio, considerando f come processo di passaggio dagli uni agli altri e scrivendo: $3=f(2)$, $7=f(4)$, $5=f(7)$. Possiamo già renderci conto, da queste poche nozioni, della vasta portata del concetto di associazione ordinata. Torniamo all'insieme da cui avevamo preso le mosse, ossia $3 = \{0,1,2\}$, che considerato nella forma $\{0, 1, \{0,1\}\}$ richiama le ben note trilogie tesi-antitesi-sintesi (oggetto/soggetto-soggetto/oggetto-conoscenza, negativo-positivo-neutro, inizio-fine-percorso, brahma-shiva-vishnu, ecc.). La funzione "successivo" $s = \{(0,1),(1,2)\}$ coincide in questo caso con quella esponenziale binaria, ossia quella che associa ad un numero la potenza di 2 avente per esponente quel numero. Ciò non accade più se passiamo all'insieme $4 = \{0,1,2,3\}$. Osserviamo inoltre che per operare nell'insieme 3 in modo chiuso, ossia restando sempre nell'ambito di tale insieme, basta considerare il numero tre come periodo di ciclicità, ossia identificarlo con lo zero; vedremo come questa identificazione "tutto=nulla" conduce alla ciclicità settenaria. Possiamo riguardare gli elementi del 3 come due vertici, 0 e 1, e un lato, non orientato, che li congiunge. Tenendo invece conto di un possibile orientamento di tale percorso si ottiene l'insieme $\{ 0, 1, (0,1), (1,0)\}$, due vertici e due percorsi. I due vertici possono essere concepiti come percorsi stazionari, per ottenere così un insieme omogeneo : $\{ (0,0), (1,1), (0,1), (1,0) \}$ o, semplificando, $\{00,11,01,10\}$. Questi non sono altro che i digrammi costruibili con i simboli di yin e yang del libro dei mutamenti della filosofia taoista, lo Yi-Ching. Analizzando più a monte la cosa, un digramma può essere inteso come una funzione di dominio $\{0,1\}$, che associa a 0 il primo elemento del digramma (l'elemento yin) e a 1 il secondo (l'elemento yang). Per cui con la scrittura contratta 00 veniamo ad indicare non più la coppia (0,0), ma la funzione $\{(0,0),(1,0)\}$ definita sul dominio $2=\{0,1\}$. L'insieme di tutte le funzioni definite su un dominio A e aventi un codominio che sia sottinsieme di un insieme B si denomina "insieme potenza di base B ed esponente A" (ciò dipende dal fatto che se A ha m elementi e B ha n elementi, vi sono esattamente n^m funzioni del tipo suddetto) e si indica proprio con il simbolo B^A. Pertanto l'insieme dei quattro digrammi è l'insieme potenza 2^2 . Ecco che siamo quindi passati alla terza delle potenze di 2 considerate all'inizio. Rivisitando, alla luce del concetto insiemistico di elevamento a potenza, anche la potenza 2^1, vediamo che essa indica l'insieme delle funzioni definite su $1=\{0\}$ e assumenti valori nell'insieme $2=\{0,1\}$, e queste sono i due "monogrammi" $\{(0,0)\}$ e $\{(0,1)\}$. Addirittura possiamo tornare alla potenza 2^0 e notare che essa denota l'insieme delle funzioni a dominio nullo, ossia vuoto, e che l'unica entità che possa essere dotata di tale proprietà (ossia di essere una funzione con dominio vuoto) è l'insieme vuoto (che è quello caratterizzato da qualunque proprietà impossibile), per cui $2^0=\{0\}$ ovvero $2^0=1$. Rimarchiamo che la funzione vuota è l'insieme vuoto stesso, che possiamo adesso chiamare "nulligramma". In questo contesto lo zero, insieme vuoto, assurge a simbolo dell'unità primaria , il tao , e lo yin e lo yang, in quanto monogrammatici sono associati alle funzioni $\{(0,0)\}$, simbolo di staticità, e, rispettivamente, $\{(0,1)\}$, simbolo di dinamicità, passaggio da 0 a $1=\{0\}$, quindi inglobazione o presa di coscienza . Lo yin e lo yang non sono quindi associati alle cifre 0 e 1 semplicemente, bensì ai concetti di permanenza e transizione. Così il $2=\{0,\{0\}\}$ si presenta come accostamento senza ordine di due stadi che nel monogramma yang vengono ordinati secondo il processo da 0 a $\{0\}$.

Qualunque sia l'insieme A, la potenza A^0 risulta essere $1=\{0\}$, per cui lo zero è esponente comunque generatore di unità, intesa come coscienza di se stesso, globalmente "metaconsiderato".

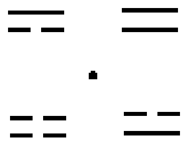
Riunendo gli insiemi 2^0, 2^1, 2^2, ossia nulligramma, monogrammi e digrammi, otteniamo un insieme di sette elementi, ordinabili evolutivamente nel modo suddetto, da yin a yang all'interno di ogni ordine di "grammalità" e dando maggior peso nel digramma alla posizione più bassa. Un altro ordinamento, centrato nel nulligramma (segnato con un punto) e simmetrico rispetto ad esso, che, pur nello sviluppo da yin a yang, si basa sulla complementarità (ovvero dualità) dei simmetrici rispetto a tale centro, è il seguente :



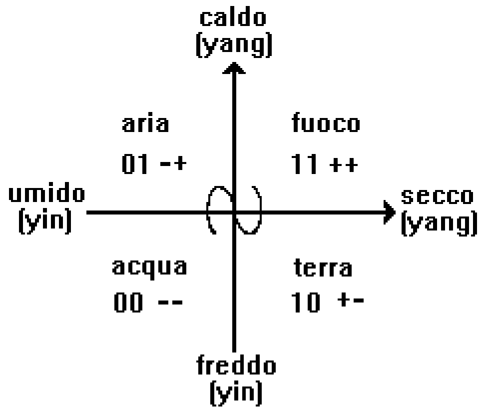
in cui si utilizza il procedere al di dentro di ordini crescenti ; oppure l'altro :



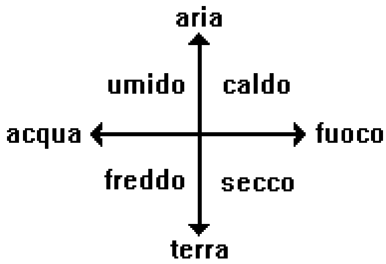
in cui si utilizza il procedere a seconda della "quantità" di yin e yang presente in ogni figura.I tre "mattoni" binari 2^0, 2^1, 2^2 conducono quindi al numero tipico della ciclicità, il 7. Molte ed interessanti potrebbero a questo punto essere le digressioni che si diramano da tale schematizzazione (scomposizione binaria del 7) su tale numero quando si esaminino gli ordinamenti strutturati possibili di un'ottava (= gruppo di sette, completato con un "capogruppo" del gruppo omologo successivo, come per le note musicali). Così come va notato che il limitarsi agli esponenti pari, quindi a 2^0 e 2^2 , porta ad una configurazione del tipo :



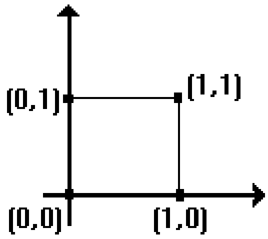
configurazione che risulta molto significativa quando attribuiamo ad ogni posizione nel generico digramma una qualità verificata o meno a seconda che nella posizione stessa compaia lo yang o lo yin. Ad esempio, se associamo la posizione più bassa nel digramma alla polarità umido/secco (in ordine yin/yang) , e la seconda posizione - quella in alto - alla polarità freddo/caldo, i quattro digrammi corrispondono alle combinazioni (da yin a yang): umido-freddo, umido-caldo, secco-freddo, secco-caldo, corrispondenti rispettivamente agli "elementi" della filosofia greca : acqua, aria, terra, fuoco. Il quinto elemento (la "quintessenza") "etere" o "spazio", non caratterizzato da alcuna delle due polarità, resta associato al nulligramma. La rappresentazione geometrica di tale modello può basarsi sul piano cartesiano :



Codificando con le cifre 0 e 1 lo yin e lo yang, e interpretando i codici binari 00, 01, 10, 11 come espressioni binarie dei numeri 0, 1, 2, 3, risultano opposti i quadranti di uguale "parità" (cioè entrambi pari o dispari), mentre la successione decrescente 3, 2, 1, 0 corrisponde alla sequenza fuoco, terra, aria, acqua, tradizionale nella disposizione zodiacale degli elementi, e segue, nel grafico cartesiano, un andamento a forma di N (evidenziato intorno al centro). A questo modello "settoriale", ovvero angolare (che associa quadranti, quindi settori del piano, ovvero angoli) agli elementi e ai digrammi, abbiamo, dualmente, un modello "vettoriale", ovvero assiale, in cui associamo alle polarità nel digramma i quadranti stessi (e quindi alle posizioni nel diagramma unioni di quadranti opposti al vertice), per cui ogni digramma, e di conseguenza ogni coppia di manifestazioni di polarità, viene associato alla figura di confine fra i due quadranti associati alle singole scelte di polarità coinvolte nel digramma, cioè semiassi orientati, o alternativamente vettori di essi rappresentativi :



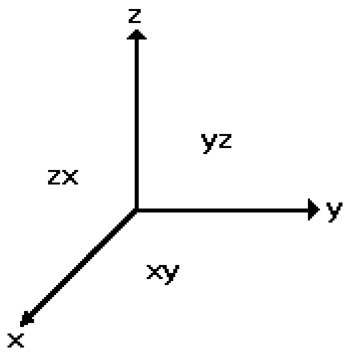
Alle rappresentazioni settoriale e vettoriale si aggiunge quella puntuale, in cui le coppie di cifre 0/1 corrispondenti ai digrammi vengono semplicemente associate semplicemente a punti di cui le stesse sono ascisse e ordinate, dando luogo ai vertici di un quadrato unitario :



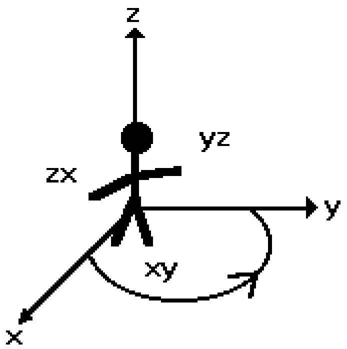
I numeri associati ai codici binari ottenuti da tali coppie digitali, sono disposti in modo tale che quelli fra loro opposti sono complementari a 3 , ossia a $2^2 - 1$.
Tali considerazioni si riportano a tre dimensioni, conducendo agli 8 (= 2^3) trigrammi, e apre le porte alle successive potenze di 2 : $2^4=16$, $2^5=32$, $2^6=64$, che sembrano avere, nell'ambito della tradizionale rappresentazione astratta di un cosmo simbolico, un ruolo più vicino all'uomo e alla sua psiche (si pensi alle 16 figure geomantiche, al numero 32 nella cartomanzia, ai 64 esagrammi, coppie di trigrammi, dello Yi-Ching ; "mantiche", pertanto discorsi orientati al destino umano). I modelli utilizzati nella tradizione taoista sono per l'appunto $8=2^3$ e $64=2^6=8^2$, relativi a trigrammi e ad esagrammi. Gli otto trigrammi, codificati in "bit" 0/1 sono :

000 001 010 011 100 101 110 111 .

Essi sono l'espressione in base 2 dei numeri da 0 a 7, e, questa volta, restano associati agli otto ottanti dello spazio tridimensionale riferito ad un sistema cartesiano di ascisse, ordinate e quote. Alternativamente si potranno associare alle tre posizioni che concorrono a costituire un trigramma i tre piani coordinati relativi al sistema di riferimento cartesiano considerato. In tal modo, detti rispettivamente x, y, z gli assi delle ascisse, delle ordinate e delle quote (corrispondenti, come già visto, alle tre posizioni del trigramma), associamo a x il piano yz, a y il piano zx e a z il piano xy :

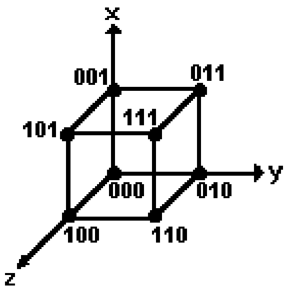


Ma in ogni posizione va effettuata una scelta (0 oppure 1) di polarità, e mentre per gli assi questa si traduce in un orientamento (indicato da una freccia), per i piani ciò non è possibile. Si può però associare, nell'ambito di un piano relativo ad una data posizione (per esempio, per la prima posizione il piano yz, ortogonale all'asse x, asse relativo appunto alla prima posizione), ad ognuna delle due polarità una pagina del piano, quella che guarda il semiasse relativo all'orientamento scelto sull'asse associato al piano (nel caso suddetto, la pagina del piano yz che si rivolge alla freccia dell'asse x, se la polarità scelta è 1, altrimenti la pagina opposta). Ognuna di tali pagine è associata ad uno dei due semispazi in cui lo spazio è diviso dal piano che supporta tale pagina. Pervenendo così ad una terna di semispazi, che si interseca appunto in un ottante, otteniamo, per via duale alla precedente, e in modo più elaborato, gli otto ottanti associati ai trigrammi. Tale secondo modo di pervenire ad un ottante tramite intersezione di tre semispazi non è una gratuita complicazione, in quanto permette di evidenziare un discorso di orientamento. Se immaginiamo di disporci lungo l'asse z con la testa rivolta nel verso della freccia di tale asse, possiamo valutare sul piano ortogonale xy in che modo avviene un movimento di rotazione, ad esempio antiorario per lo spostamento del "braccio" di x verso quello di y e orario per lo spostamento inverso.

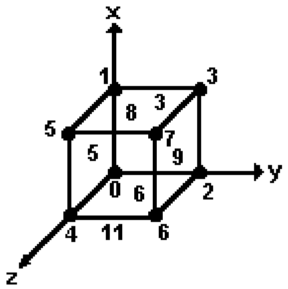


Pertanto, una volta fissato un orientamento (orario o antiorario), un asse orientato nello spazio induce un verso di rotazione nel piano ortogonale a tale asse. Indicando, per fissare le idee, con xyz l'orientamento spaziale (tridimensionale) secondo cui l'osservatore disposto lungo x (con il verso piedi-testa coincidente con il verso del semiasse orientato x stesso) vede y ruotare verso z - e supponiamo che tale orientamento sia antiorario - notiamo che lo stesso orientamento è dato dalle terne yzx e zxy, e che ognuno di tali orientamenti si inverte cambiando uno solo dei versi degli assi orientati coinvolti nel suo opposto (inversione di polarità). Ciò porta a interpretare in modo nuovo i trigrammi. Ad esempio, riferendoci alla terna d'assi orientati xyz, possiamo associare al trigramma 001 la nuova terna x y(-z), dove -z indica **l** semiasse polarmente opposto a z ; allo stesso modo il trigramma 110 corrisponde alla terna (-x)(-y)z . Quindi, lo zero non modifica il verso dell'asse orientato che si trova nell'omologa posizione dello zero stesso, mentre l'uno lo modifica nel verso opposto. In tal modo si constata che i trigrammi 000, 011, 110, 101 non modificano l'orientamento, mentre i trigrammi 111, 100, 001, 010 lo invertono. Ciò concorda con la classificazione dei trigrammi in quattro yin (che, nel nostro contesto, non modificano l'orientamento), costituiti da un numero dispari di cifre pari a zero, e in trigrammi yang (che invertono l'orientamento), costituiti da un numero dispari di cifre pari a uno. Chiameremo i primi quattro trigrammi, oltre che yin, "di tipo zero", gli altri, oltre che yang, "di tipo uno". Pertanto abbiamo un modello "versoriale" (legato ai versori degli assi, ossia ad entità plurivettoriali legate al verso e alla direzione, e non alle intensità come invece i vettori), con la precisazione che deve esser scelta una terna di versori di riferimento base.

Analogamente al modello bidimensionale, anche qui possiamo associare i trigrammi ai vertici di un cubo unitario :



Nel procedere da 0 a 7 lungo gli ottanti o da un vertice all'altro del cubo unitario, si segue un procedimento a N come prima nel caso bidimensionale. Ciò ricalca l'alternanza basso/alto. Inoltre, in ogni faccia del cubo la somma di due vertici opposti uguaglia la somma degli altri due, per cui si può associare ad ogni faccia un numero - appunto il valore di tale somma. In tal modo risultano opposte le facce del 5 e del 9, quelle dell' 8 e del 6 e quelle del 3 e dell' 11 :

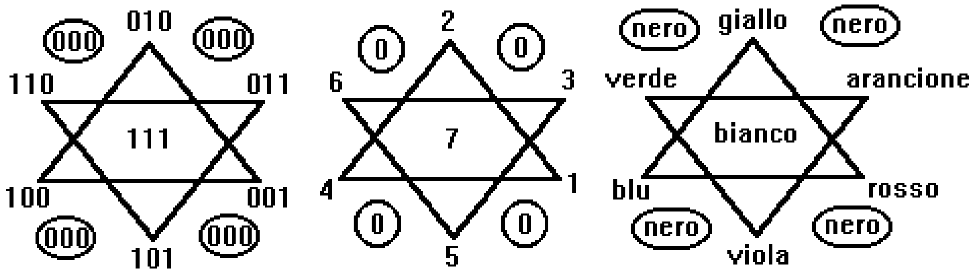


Inoltre tutti i quadrati ricavabili dal cubo per sezione diagonale restano, nel suddetto modo, associati al numero 7, che è la somma di due vertici opposti nel cubo. Osserviamo che le tre facce non giacenti sui piani coordinati sono associate ai numeri 8=7+1, 9=7+2, 11=7+4 a seconda che passino per i vertici contrassegnati rispettivamente con 1, 2, 4 . Comincia a presentarsi la ciclicità del numero 7 (fondata sull'assunzione che 0 e 7 si identifichino), e possiamo associare a tali facce rispettivamente i numeri 1, 2 e 4, riservando alle facce opposte i complementi a 7 dei suddetti numeri. In tal modo la somma dei numeri contrassegnanti facce opposte non è più 14 bensì 7, così come accade per vertici opposti nel cubo. Abbiamo così alla fine numerato gli otto vertici e le sei facce del cubo, utilizzando per queste ultime i numeri corrispondenti ai trigrammi non estremali (cioè diversi da 000 e 111) .

Un'altra interpretazione dei trigrammi collegata alla codificazione in base 2 è quella insiemistica che nasce dal considerare gli otto sottoinsiemi di un insieme di tre elementi ($8=2^3$) associando ognuno di tali elementi ad una posizione nell'ambito del trigramma e ad ogni trigramma il sottoinsieme costituito dagli elementi nella cui posizione compare 1. Così 001 resta associato al sottoinsieme costituito solo dal terzo elemento. In tal modo il trigramma diventa la distribuzione di risposte di presenza nel sottinsieme per ognuno dei tre elementi, corrispondendo 0 all'assenza e 1 alla presenza. Un "corollario" di tale modello è il modello cromatico esagonale-ottagonale (in effetti a buon diritto anche "eptagonale" !). Se i tre elementi dell'insieme ternario su considerato sono, nell'ordine blu, giallo, rosso (i colori primari), ai sottoinsiemi di tale insieme, e quindi, nel senso su indicato, ai trigrammi digitali, corrispondono otto colori secondo la tabella seguente :

trigramma	blu (B)	giallo (G)	rosso (R)	sottoinsieme	colore	numero
000	0	0	0	{ } (vuoto)	nero	0
001	0	0	1	{ R }	rosso	1
010	0	1	0	{ G }	giallo	2
011	0	1	1	{ G,R }	arancione	3
100	1	0	0	{ B }	blu	4
101	1	0	1	{ B,R }	viola	5
110	1	1	0	{ B,G }	verde	6
111	1	1	1	{ B,G,R }	bianco	7 .

Questo modello ha una rappresentazione notevole nella stella a doppio triangolo :

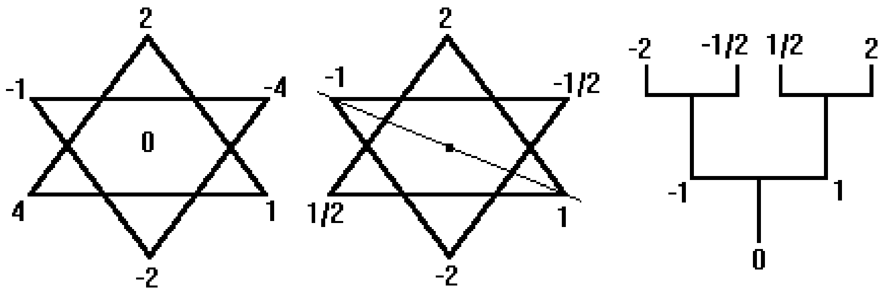


Si ottiene così un organico e simmetrico inquadramento dei colori primari e secondari, completati dal "colore totale" (il bianco) e dal "non colore" (il nero).

Anche dallo schema del sigillo salomonico - com'è appunto denominata la stella a sei punte considerata - si ricava il criterio di ciclicità settenaria. Sommando i numeri associati a vertici non consecutivi si ottiene il numero contrassegnante il vertice fra essi compreso, purché tale somma sia calcolata "modulo 7", cioè identificando 7 con 0. Quindi l'algebra sottesa a tale simbolo è quella modulare a sette elementi Z_7 = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 }. In tale algebra i numeri 4, 5, 6 sono esprimibili nell'ordine come -3, -2, -1. Quindi i simmetrici rispetto al centro della stella sono opposti, cioè sommati dànno 0 (si ha, per il centro 0 = 0). In tale algebra non solo ogni elemento ha un opposto, ma tutti gli elementi non nulli hanno un inverso, cioè un simmetrico moltiplicativo (ossia un elemento che moltiplicato per quello dato produca come risultato 1). Precisamente, 1 e 6 = -1 sono autoinversi (inversi di se stessi), mentre i pari (2 e 4 = -3) e i dispari (3 e 5 = -2) costituiscono coppie di inversi. Quindi 4 = 1/2 (e analogamente 2 = 1/4) e 5 = 1/3 (e analogamente 3 = 1/5). Pertanto possiamo usare solo 0, 1 e 2, per esprimere tutti e sette gli elementi dell'algebra considerata :

$$0 \ , \ 1 \ , \ 2 \ , \ -1/2 \ , \ 1/2 \ , \ -2 \ , \ -1 \ .$$

Le simmetrie e le interrelazioni esposte si compendiano nelle seguenti figure:



Vediamo altresì come il sigillo salomonico e il simbolo del candelabro a sette bracci (che schematizzato dà luogo ad un albero binario) sono matematicamente collegati alla stessa struttura. In questo secondo si evidenziano ambedue le simmetrie additiva e moltiplicativa, in quanto ognuna delle metà del candelabro ha una simmetria interna (rispetto a 1 o a -1), che è appunto quella fra gli inversi, mentre le due metà stesse si corrispondono nella simmetria additiva.
La presenza in una ottava di sette elementi "manifesti" e uno "non manifesto" ricorre in molti contesti (del resto, si pensi alle sette note e alla "non nota", la pausa, il silenzio).
Nella tradizione ayurvedica (della antica medicina indiana), le costituzioni dell'organismo umano sono sette, date dalle combinazioni, non vuote, di tre principi, detti "dosha" (che sono denominati kapha, vata e pitta), proprio secondo il modello cromatico (per cui possiamo anche, associando i colori primari ai tre suddetti principi, determinare il colore - escludendo il nero - nonché il codice - escludendo 000 - di ognuna di tali costituzioni.
Un'altra notevolissima associazione con i trigrammi è data dalle otto trasformazioni geometriche piane fondamentali, che sono tutte isometriche (cioè conservano la distanza) e si suddividono in quattro simmetrie assiali e quattro rotazioni (le prime invertono l'orientamento di una figura, le seconde lo mantengono, ossia sono degli "spostamenti").
La maniera più naturale di determinare tele associazione è far scaturire dal generico punto del piano (x,y) il punto trasformato (x',y') secondo tre operazioni : cambiamento di segno al primo posto (ascissa), cambiamento di segno al secondo posto (ordinata), scambio dei due posti (ascissa con ordinata). Otteniamo pertanto la tabella (operiamo lo scambio prima dei cambiamenti di segno) :

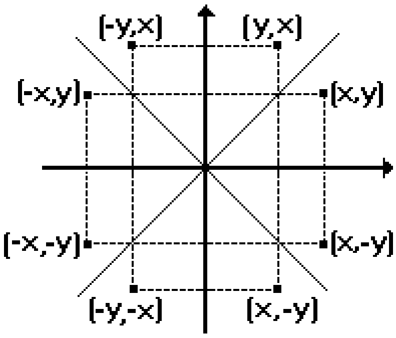
scambio sx <--> dx	cambio segno sx	cambio segno dx	punto finale
0	0	0	(x,y)
0	0	1	(x,-y)
0	1	0	(-x,y)
0	1	1	(-x,y)
1	0	0	(y,x)
1	0	1	(y,-x)
1	1	0	(-y,x)
1	1	1	(-y,-x).

Otteniamo pertanto le otto trasformazioni seguenti :

codice	formula	trasformazione	nome abbreviato
000	(x,y) ---> (x,y)	identita	ide
001	(x,y) ---> (x,-y)	coniugazione (simmetria rispetto all'asse delle ascisse)	con

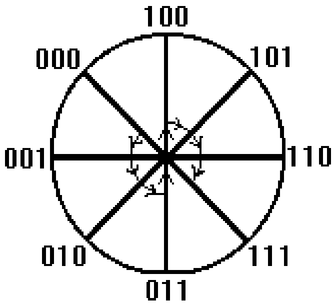
010	(x,y) ---> (-x,y)	coniugazione opposta (simmetria rispetto all'asse delle ordinate)	- con
011	(x,y) ---> (-x,-y)	opposizione (simmetria rispetto all'origine degli assi)	- ide
100	(x,y) ---> (y,x)	inversione (simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante)	inv
101	(x,y) ---> (y,-x)	ortogonalità oraria (rotazione di un quadrante in senso orario)	ort
110	(x,y) ---> (-y,x)	ortogonalità antioraria (rotazione di un quadrante in senso antiorario)	- ort
111	(x,y) ---> (-y,-x)	inversione opposta (simmetria rispetto alla bisettrice del 2° e 4° quadrante)	- inv

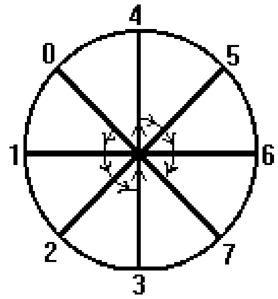
La disposizione geometrica dei punti terminali di tali trasformazioni (in base alle quali è possibile ricavare algebricamente tutta la geometria euclidea del piano, fornisce il seguente grafico a croce :

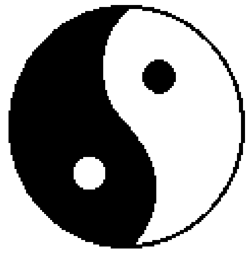


Osserviamo che le trasformazioni avente per codice trigrammi di tipo yin (con um numero dispari di 0) sono rotazioni, per cui non modificano l'orientamento di una figura o un verso di rotazione, mentre quelle di codice yang (con un numero dispari di 1) sono simmetrie assiali, che quindi invertono l'orientamento di una figura o un verso di rotazione.

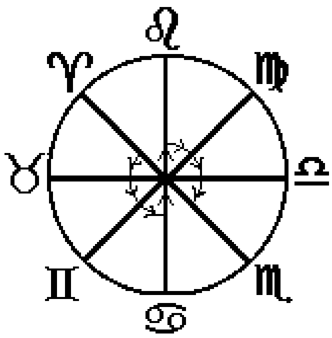
I primi quattro trigrammi sono "duali" degli ultimi quattro e corrispondono, come già detto, a numeri complementari a sette. Tale dualità viene evidenziata nella tradizionale disposizione Pa-Qua detta di Fu-Hsi, collegata al famoso simbolo T'ai-chi :



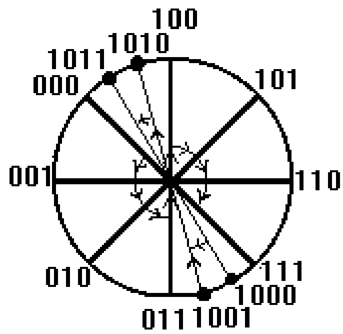




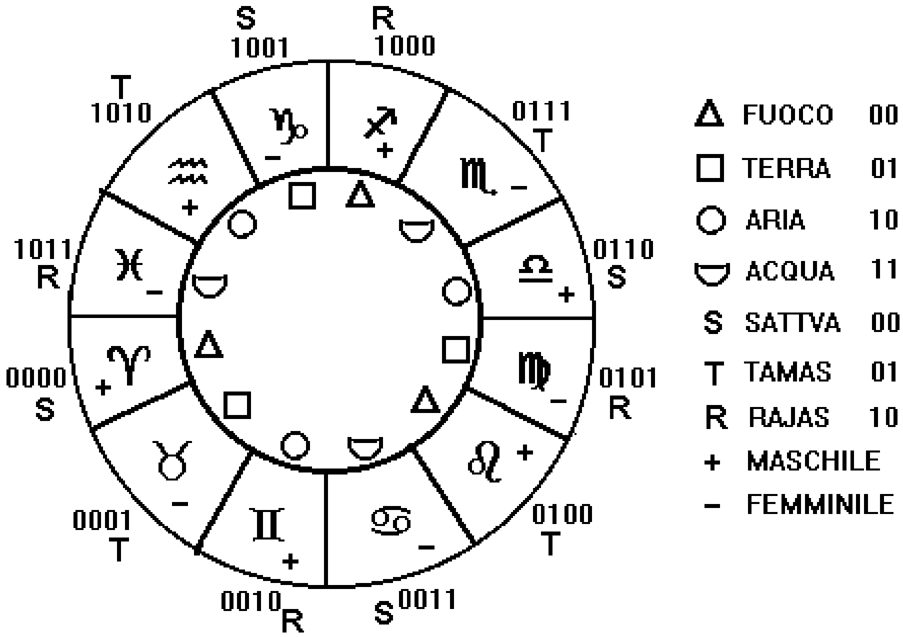
I punti di "inversione sono nel passaggio da 011 a 100, cioè dal 3 al 4 e da 111 a 000, cioè dal 7 allo 0, per riattivare il ciclo.
L'inversione fra il quarto e il quinto punto (ricordare che la numerazione inizia da 0) concorda con la posizione della luna e del sole nello zodiaco, astri relativi ai segni del cancro e del leone rispettivamente, quarto e quinto segno dello zodiaco partendo tradizionalmente dall'ariete. Infatti, la complementarità a 7 nell'ambito dei trigrammi si traduce nella relazione di "equiplanetarietà" fra segni dello zodiaco :



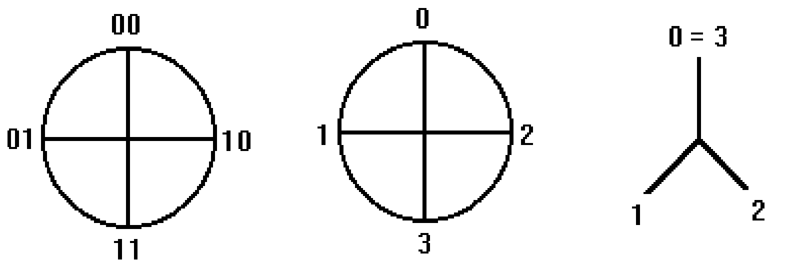
Restano così associati i primi segni dello zodiaco agli otto trigrammi, e quindi agli ottanti dello spazio tridimensionale.
Per arrivare alla rappresentazione di tutti i dodici segni dello zodiaco bisogna "interpolare" lo schema ottagonale andando avanti nella numerazione binaria :



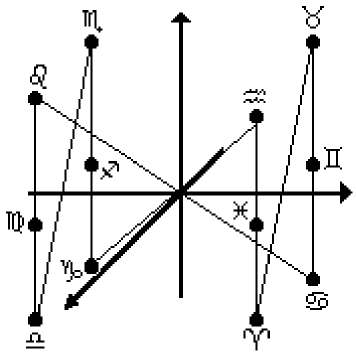
I codici aggiunti non risultano duali per coppie di segni opposti (ossia coplanetari) nella loro interezza, ma solo nelle ultime tre cifre, cioè, ancora, per la componente trigrammica. Possiamo associare ad ogni segno un tetragramma e tener conto non solo dell'elemento associato ad ogni segno, ma anche del "guna" - ossia del principio tripolare della filosofia shivaita, che classifica la molteplicità a seconda delle caratteristiche di presenza di uno dei tre aspetti sattva, tamas e rajas - e ridisporre i segni nella loro sequenza zodiacale, ottenendo lo schema seguente :



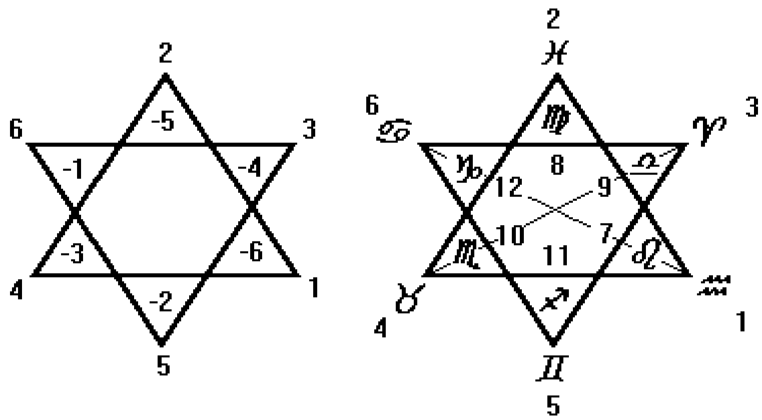
Qui notiamo che gli ultimi due "bit" (cifre binarie) del codice di ogni segno corrispondono all'elemento del segno, mentre il digramma iniziale (i primi due bit del codice) corrisponde al guna. Si può anche rilevare come lo zodiaco venga ripartito in quattro periodi stagionali, partendo dal segno dell'ariete, ognuno di tre segni, e in tal modo si assegna alla stagione l'elemento caratteristico del segno centrale della terna stagionale (pertanto la primavera è associata alla terra, l'estate al fuoco, l'autunno all'acqua e l'inverno all'aria. Complementarmente, possiamo suddividere lo zodiaco in tre periodi, ognuno di quattro segni, e in tal caso in ogni quaterna si ripete un guna (all'inizio e alla fine della quaterna), che è quindi quello associabile per discriminazione alla quaterna stessa ; cosicché i tre periodi quaternari restano associati ai guna sattva (per il sottocodice iniziale 00), tamas (per il sottocodice iniziale 01), rajas (per il sottocodice iniziale 10). Tali codici digrammici dei guna confermano la bipolarità tamas <---> rajas e la posizione di equilibrio di sattva, riconducendo ad un discorso di ciclicità ternaria che ricalca quello tridimensionale spiegato per l'otto (2^3) ma relativo al caso bidimensionale, che conduce prima ai quattro digrammi e poi all'identificazione di 00 (= 0) con 11 (= 3), secondo lo schema bidimensionale :



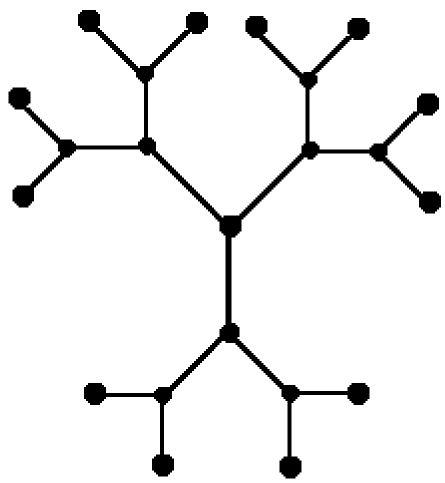
Tale schema corrisponde alla deduzione dell'algebra "tridimensionale" Z_7 a partire dall'ottagono dei trigrammi, e, in questo caso, conduce all'algebra "bidimensionale" Z_3 a partire dal quadrato dei digrammi. Vediamo quindi come i principi di triramazione e biforcazione sintetizzano strutture bi- e tri-dimensionali. Tale sintesi risulta, per altra via, dall'associazione dei segni ad ottanti dello spazio e a quadranti del piano di separazione fra due semispazi, come nella seguente disposizione che traduce la coplanetarietà in simmetria centrale e l'opposizione nella ruota zodiacale in simmetria planare rispetto al piano separante i due semestri, lasciando tutti i segni di uno stesso guna in uno stesso dei semispazi considerati o sullo stesso piano che li separa (notare sempre l'andamento a N) :



Un'altra disposizione dello zodiaco che evidenzia la doppia simmetria (di coplanetarietà e di opposizione) e quindi una suddivisione in quattro fasi (come in una sinusoide) utilizza ancora la stella salomonica :

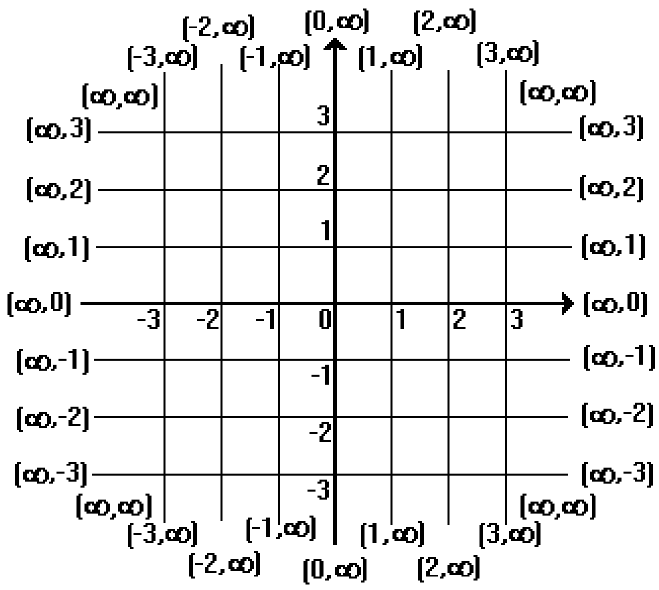


Qui la successione dei segni segue due croci, ognuna descritta due volte, e si passa tre volte (quattro considerando la ripresa del ciclo) per il centro (notare l'analogia con la curva sinusoidale nelle sue intersezioni con l'asse delle ascisse), e i segni opposti nella ruota sequenziale dello zodiaco si trovano presso lo stesso vertice - uno all'esterno e uno all'interno - mentre segni coplanetari, ovvero opposti nella ruota per così dire "taoista" (ricordiamo l'inversione nel simbolo t'ai-chi) dello zodiaco, sono su vertici opposti, sempre però uno all'esterno e uno all'interno. Quanto enucleato riguardo al settenario e allo zodiaco viene espresso in maniera particolarmente suggestiva dal seguente albero (che spingendo avanti il suo principio interno di reiterazione, produce un semplice esemplare dei cosiddetti "frattali") :



In tale "grafo" da un punto "radice" si opera una triramazione (così come, nella filosofia indiana, dal prinipio unico - il Mahashiva - si esprime la "Trimurti" Brahma-Shiva-Vishnu) e successivamente si opera, reiterata due volte, una

biforcazione (prima, ogni "persona" della Trimurti si scinde in un aspetto maschile e uno femminile ; successivamente, ognuno di tali sei aspetti dà luogo a due archetipi fondamentali, ottenendo così dodici archetipi manifesti, "foliari" - ossia "foglie" del nostro "albero", corrispondenti ai segni zodiacali). La triramazione iniziale produce il guna (ovvero, secondo la tradizione occidentale, il carattere, cardinale, fisso o mobile), mentre le due biforcazioni dànno luogo a tre alberi binari settenari, ognuno radicato in una persona della trimurti, e corrispondono alla scelta digrammatica elementale fra le polarità umido/secco e freddo/caldo.
L'albero genetico zodiacale quindi consta di tre settenari (collegabili a tutto quanto abbiamo esaminato per il settenario) e di una radice centrale, la qual cosa dà luogo al fatidico numero 22 della Cabala ebraica (numero, fra l'altro, delle lettere dell'alfabeto ebraico e degli arcani maggiori dei tarocchi).
Infine vogliamo accennare all'idea di prendere in considerazione una struttura piana, in cui possono definirsi le trasformazioni fondamentali prima considerate. Tale struttura geometrica risulta per l'appunto dall'algebra Z_7 ampliata con un "punto all'infinito" : ∞ . Pertanto si ritorna agli otto trigrammi partendo dal settenario, seguendo la stessa strada che integra, nella geometria continua reale, le rette con punti all'infinito, ottenendone una struttura topologica chiusa ("compatta").
Ponendo $Z_7^* = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , \infty \}$ (e associando 0 al trigramma del massimo yin e ∞ a quello del massimo yang), gli elementi 0 e ∞ sono auto-opposti e mutuamente inversi ($-0 = 0$, $-\infty = \infty$, $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$) (l'inversione di 0 e ∞ è puramente convenzionale e non è legata al fatto che il prodotto di tali elementi sia uguale a 1), e il piano $Z_7^* \times Z_7^*$ (insieme delle coppie ordinate di elementi della struttura ottonaria introdotta) diventa non un prodotto di strutture lineari, bensì un prodotto di strutture circolari, ossia quello che in geometria si denomina "toro", e risulta costituito da 64 punti, collegati agli esagrammi. Proprio allo stesso modo in cui, nell'antico libro taoista delle mutazioni (= trasformazioni), lo Yi-Ching, gli esagrammi erano riguardati come coppie di trigrammi. Otteniamo adesso, cartesianamente, la struttura matematica del "toro degli esagrammi" :



Rette nel toro degli esagrammi

Rette passanti per l'origine :

a) assi cartesiani :

$\{(1,0) , (2,0) , (3,0) , (4,0) , (5,0) , (6,0) , (0,0) , (\infty,0)\}$

$\{(0,1) , (0,2) , (0,3) , (0,4) , (0,5) , (0,6) , (0,0) , (0,\infty)\}$

b) oblique :

$\{(1,1) , (2,2) , (3,3) , (4,4) , (5,5) , (6,6) , (0,0) , (\infty,\infty)\}$

$\{(1,2) , (2,4) , (3,6) , (4,1) , (5,3) , (6,5) , (0,0) , (\infty,\infty)\}$

$\{(1,3) , (2,6) , (3,2) , (4,5) , (5,1) , (6,4) , (0,0) , (\infty,\infty)\}$

$\{(1,4) , (2,1) , (3,5) , (4,2) , (5,6) , (6,3) , (0,0) , (\infty,\infty)\}$

$\{(1,5) , (2,3) , (3,1) , (4,6) , (5,4) , (6,2) , (0,0) , (\infty,\infty)\}$

$\{(1,6) , (2,5) , (3,4) , (4,3) , (5,2) , (6,1) , (0,0) , (\infty,\infty)\}$

Rette non passanti per l'origine:

c) orizzontali :

$\{(1,1) , (2,1) , (3,1) , (4,1) , (5,1) , (6,1) , (0,1) , (\infty,1)\}$

$\{(1,2) , (2,2) , (3,2) , (4,2) , (5,2) , (6,2) , (0,2) , (\infty,2)\}$

$\{(1,3) , (2,3) , (3,3) , (4,3) , (5,3) , (6,3) , (0,3) , (\infty,3)\}$

$\{(1,4) , (2,4) , (3,4) , (4,4) , (5,4) , (6,4) , (0,4) , (\infty,4)\}$

$\{(1,5) , (2,5) , (3,5) , (4,5) , (5,5) , (6,5) , (0,5) , (\infty,5)\}$

$\{(1,6) , (2,6) , (3,6) , (4,6) , (5,6) , (6,6) , (0,6) , (\infty,6)\}$

d) verticali :

$\{(1,1) , (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) , (1,6) , (1,0) , (1,\infty)\}$

$\{(2,1) , (2,2) , (2,3) , (2,4) , (2,5) , (2,6) , (2,0) , (2,\infty)\}$

$\{(3,1) , (3,2) , (3,3) , (3,4) , (3,5) , (3,6) , (3,0) , (3,\infty)\}$

$\{(4,1) , (4,2) , (4,3) , (4,4) , (4,5) , (4,6) , (4,0) , (4,\infty)\}$

$\{(5,1) , (5,2) , (5,3) , (5,4) , (5,5) , (5,6) , (5,0) , (5,\infty)\}$

$\{(6,1) , (6,2) , (6,3) , (6,4) , (6,5) , (6,6) , (6,0) , (6,\infty)\}$

e) oblique :

Per ogni retta del gruppo b) ve ne sono 6 : quindi in tutto ve ne sono 36.

f) Retta all'infinito :

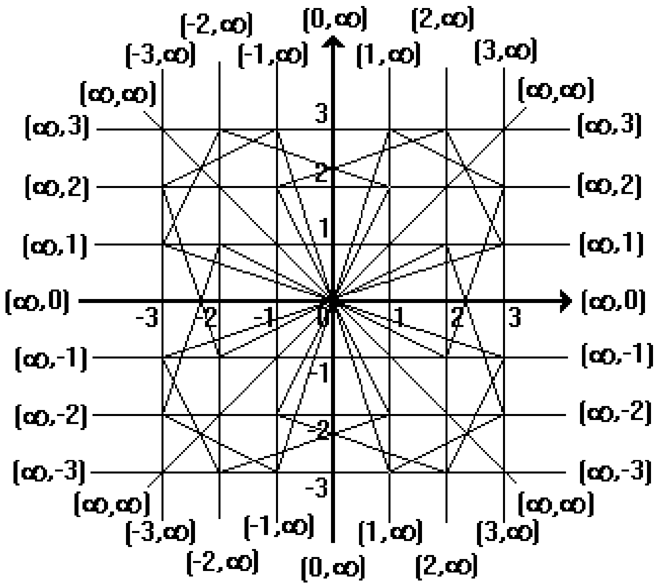
$\{ (1,\infty), (2,\infty), (3,\infty), (4,\infty), (5,\infty), (6,\infty), (0,\infty), (\infty,1), (\infty,2), (\infty,3), (\infty,4), (\infty,5), (\infty,6), (\infty,0), (\infty,\infty) \}$

(costituita da 15 punti)

TOTALE :

oblique non passanti per l'origine	36
coordinate non passanti per l'origine	12
assi cartesiani (passanti per l'origine)	2
oblique passanti per l'origine	6
	56 (più una all'infinito)

Rappresentiamo solo le rette passanti per l'origine degli assi :



Ritroviamo così anche il numero 56, numero degli arcani minori dei tarocchi .

Gaetano Speranza