LA FORMULA DI EULERO : $e^{i\,a} = \cos(a) + i\sin(a)$

Gaetano Speranza - I.T.I.S. Galileo Galilei , Roma

Approssimazione dell'arco di lunghezza a

Punti di Nepero e loro normalizzati

numeri (complessi) di Nepero : $\aleph(t, n, k) = \left(1 + \frac{t\,i}{n}\right)^{k}$

punti di Nepero : $P(t, n, k) = \text{punto}(\aleph[t, n, k])$

punti unitari di Nepero (punti normalizzati) : $U(t, n, k) = \frac{P(t, n, k)}{|P(t, n, k)|}$

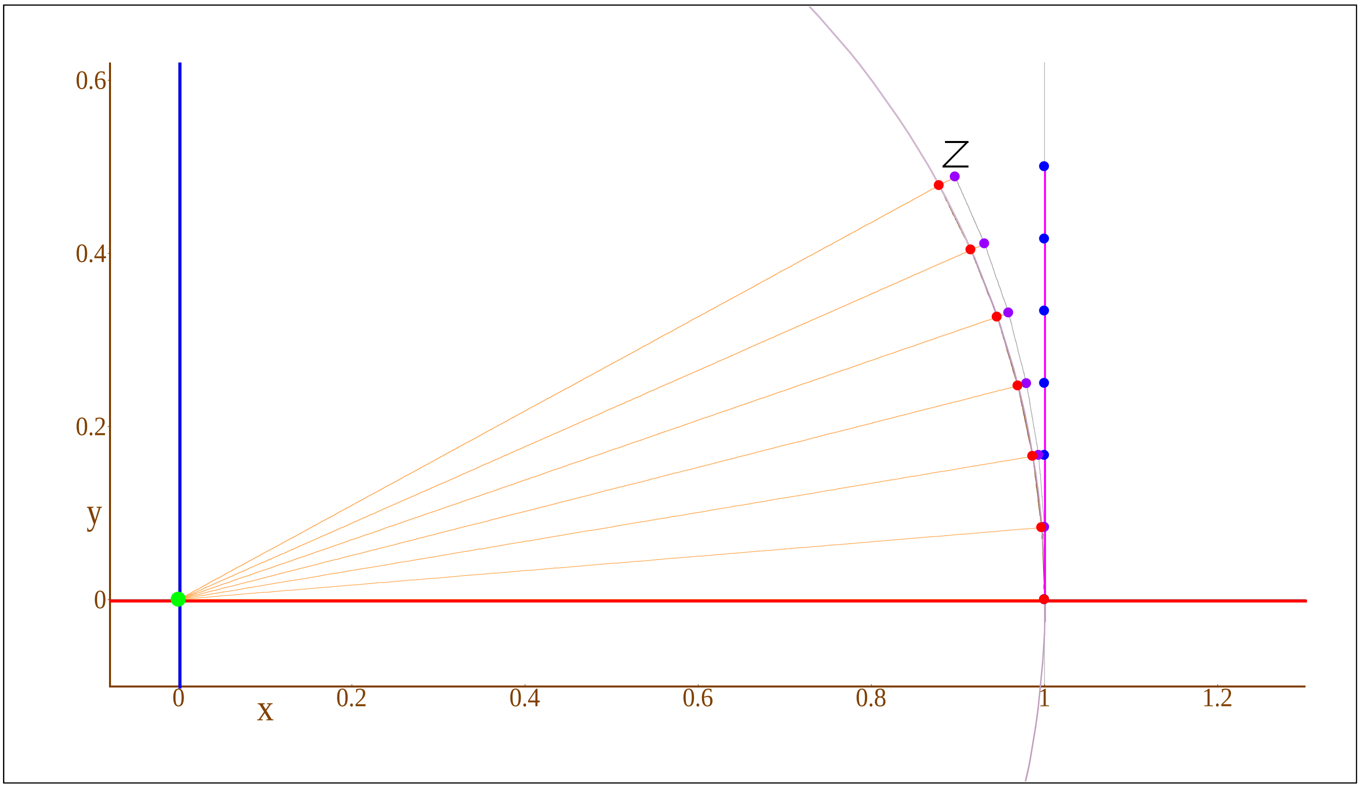
lato della poligonale di Eulero : $\lambda(t, n) = |U(t, n, 1) - (1, 0)|$

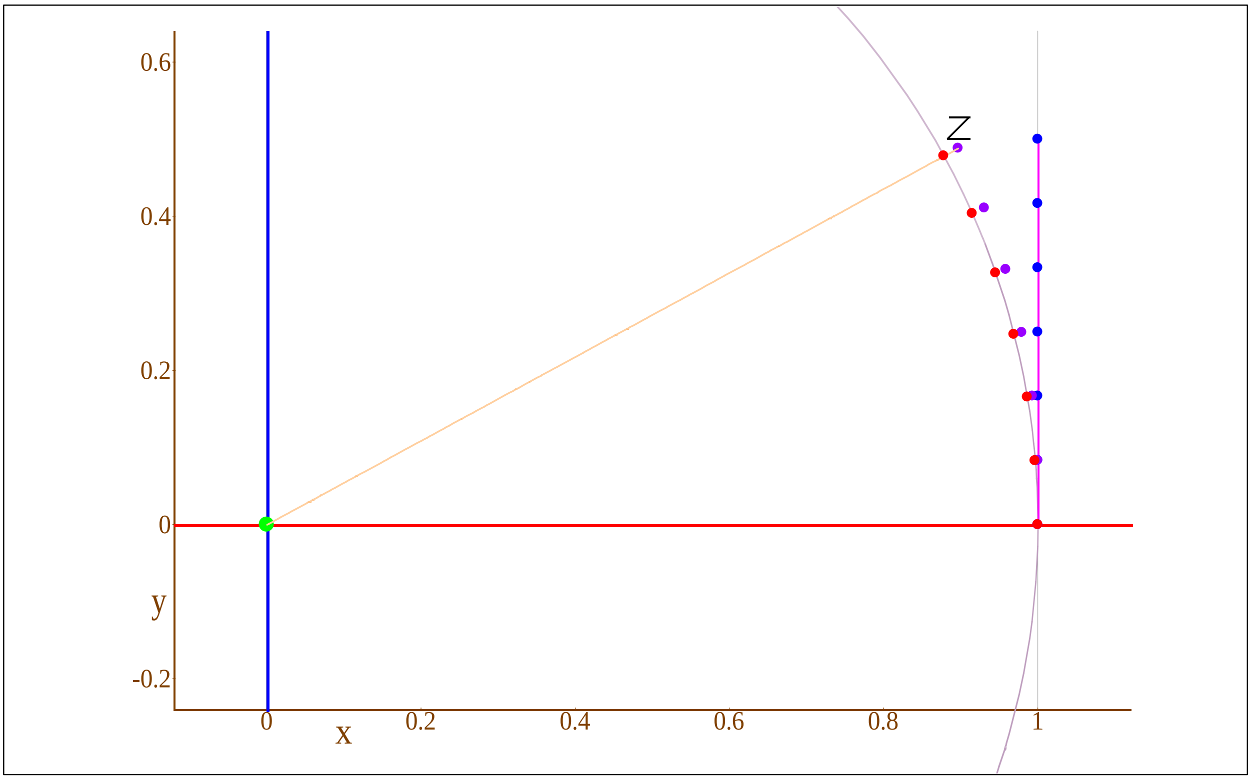
punto approssimante di Eulero : $E(t, n) = U(t, n, n)$

dati

$a = 0.5$ $\quad n = 6$ $\quad z = \left(1 + \frac{a\,i}{n}\right)^{n}$ $\quad z = \left(1 + \frac{0.5i}{6}\right)^{6}$

figura con raggi e connessioni

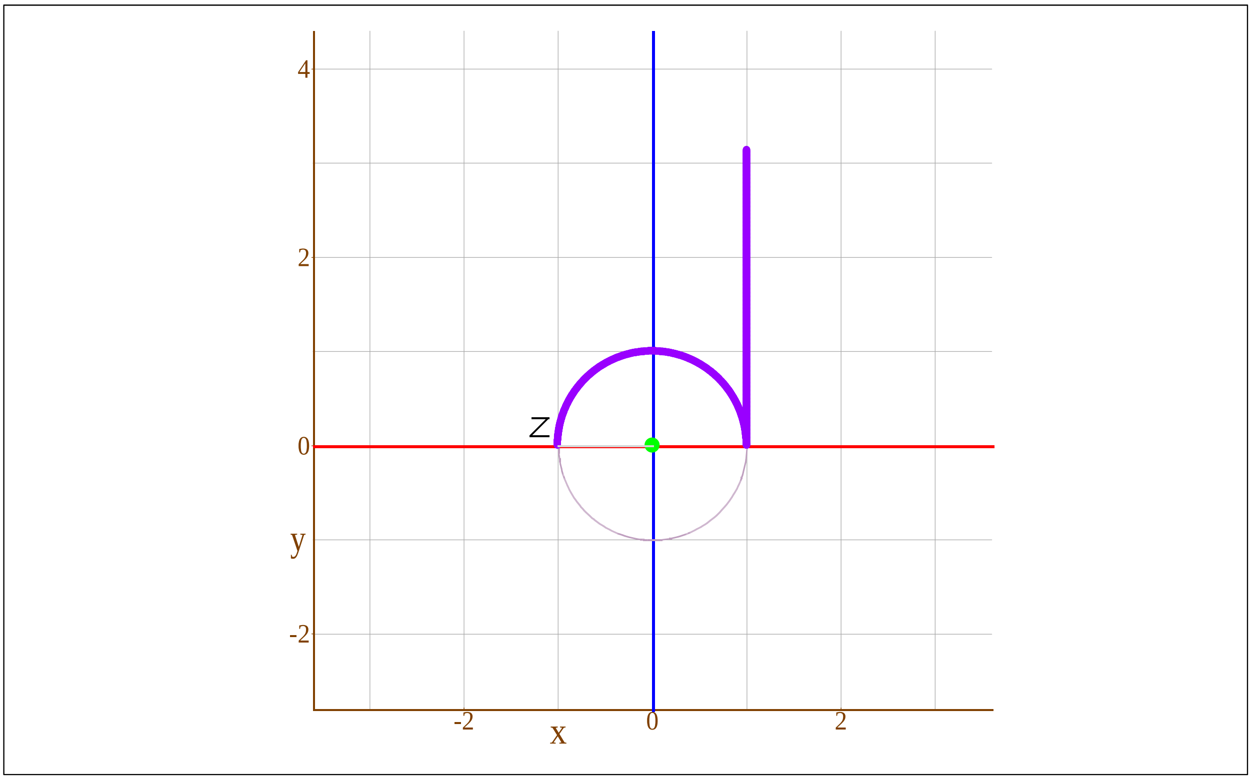




Prendiamo n alto e valutiamo la lunghezza della semicirconferenza goniometrica

visualizzazione di $\left(1 + \frac{a}{n} i\right)^k$ per k = 0,...,n

a = 3.14 n = 1000



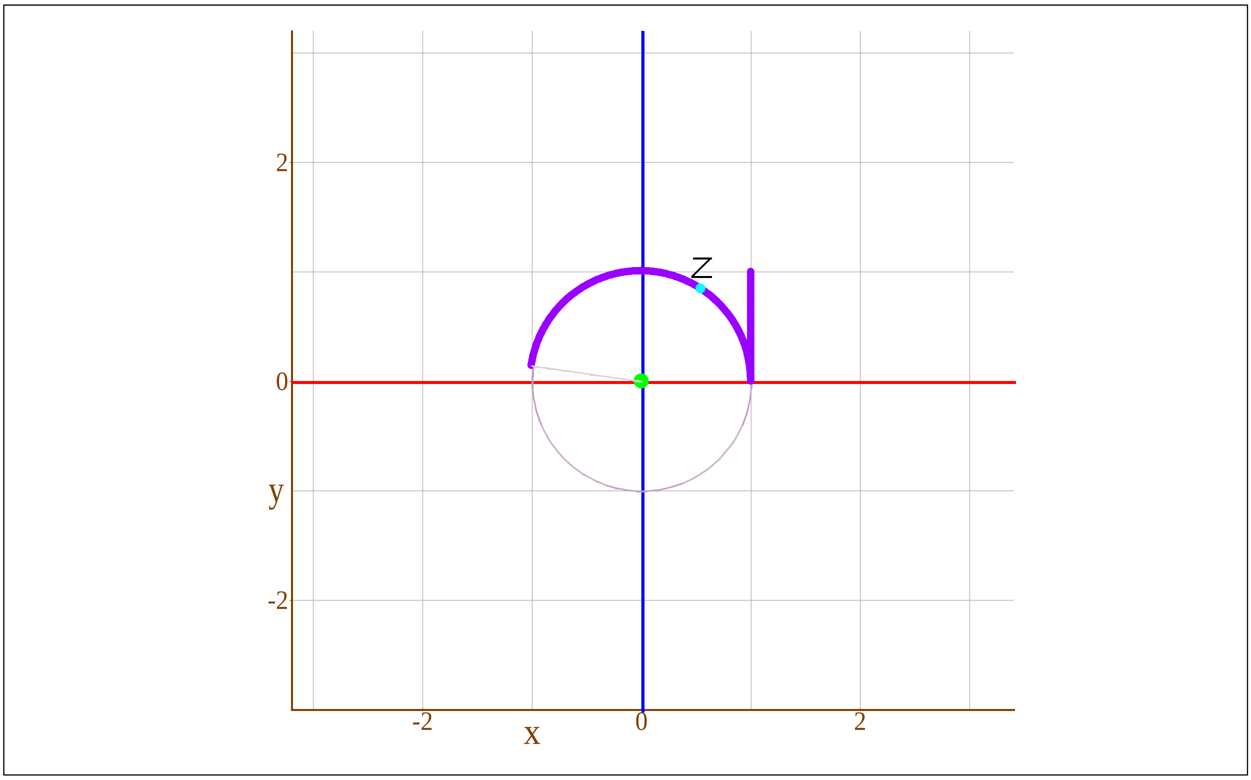
visualizzazione di $\left(1+\frac{1}{n}i\right)^{k}$ per $k = 0,\dots,N$

$a = 1 \qquad n = 100 \qquad h = 3 \qquad N = h\,n$

$$z' = \left(1+\frac{a}{n}i\right)^{k} \qquad z' = \left(1+\frac{1}{n}i\right)^{k}$$

$${}_{k\,=\,N}\big[\; z' \;=\; \left({}_{k\,=\,n}\big[\; z'\right)^{h}$$

$${}_{k\,=\,N}\big[\; z' \;=\; \left({}_{k\,=\,n}\big[\; z'\right)^{3}$$



Determinazione della lunghezza dell'arco

Intanto verifichiamo che la successione degli n-esimi (ossia finali) punti di Nepero di ordine n :

$$w_n = \left(1 + \frac{a}{n} i\right)^n$$

tende, per n tendente ad infinito, allo stesso limite cui tende la successione dei punti finali normalizzati :

$$v_n = \frac{w_n}{|w_n|} \qquad v_n = \frac{\left(\frac{a\,i}{n} + 1\right)^n}{\left|\left(\frac{a\,i}{n} + 1\right)^n\right|}$$

Mostriamo che infatti il denominatore $|w_n|$ tende ad 1 :

$$|w_n| \qquad |w_n| = \left|\left(\frac{a\,i}{n} + 1\right)^n\right|$$

$$|w_n| = \left|1 + \frac{a}{n} i\right|^n$$

$$|w_n| = \sqrt{\left(\frac{a}{n}\right)^2 + 1}^{\,n}$$

$$|w_n| = \left(\left[\frac{a}{n}\right]^2 + 1\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$|w_n| = \left(\frac{a^2}{n^2} + 1\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$|w_n| = \left(\frac{\frac{a^2}{n}}{n} + 1\right)^{\frac{1}{n}}$$

il numeratore $\frac{a^2}{n}$ tende a 0, quindi $|w_n|$ tende a $e^0 = 1$.

Primo punto di Nepero normalizzato di ordine n e sua distanza da 1

$$z_n = \frac{1 + \frac{a}{n} i}{\left|1 + \frac{a}{n} i\right|}$$

$$z_n = \frac{1 + \frac{a}{n} i}{\sqrt{\left(\frac{a}{n}\right)^2 + 1}}$$

$$z_n = \frac{1+\frac{a}{n}i}{\sqrt{\frac{a^2}{n^2}+1}}$$

$$z_n = \frac{1+\frac{a}{n}i}{\sqrt{\frac{a^2+n^2}{n^2}}}$$

$$z_n = \frac{1+\frac{a}{n}i}{\frac{\sqrt{a^2+n^2}}{n}}$$

$$z_n = \frac{n}{\sqrt{a^2+n^2}} + \frac{a\,i}{\sqrt{a^2+n^2}}$$

$$\delta_n = \left|z_n - 1\right|$$

$$\delta_n = \left|\frac{n}{\sqrt{a^2+n^2}} + \frac{a\,i}{\sqrt{a^2+n^2}} - 1\right|$$

$$\delta_n = \left|\frac{n}{\sqrt{a^2+n^2}} - 1 + \frac{a\,i}{\sqrt{a^2+n^2}}\right|$$

$$\delta_n = \left|\frac{-\sqrt{a^2+n^2} + n + a\,i}{\sqrt{a^2+n^2}}\right|$$

$$\delta_n = \frac{\left|-\sqrt{a^2+n^2} + n + a\,i\right|}{\sqrt{\left|a^2+n^2\right|}}$$

$$\delta_n = \frac{\left|-\sqrt{a^2+n^2} + n + a\,i\right|}{\sqrt{a^2+n^2}}$$

$$\delta_n = \frac{\sqrt{\left(-\sqrt{a^2+n^2} + n\right)^2 + a^2}}{\sqrt{a^2+n^2}}$$

$$\delta_n = \sqrt{\frac{\left(-\sqrt{a^2+n^2} + n\right)^2 + a^2}{a^2+n^2}}$$

$$\delta_n = \sqrt{\frac{2a^2+2n^2-2\sqrt{a^2+n^2}\,n}{a^2+n^2}}$$

$n\,\delta_n$ tende ad a per n tendente ad infinito

$$n\,\delta_n = \sqrt{\frac{2a^2+2n^2-2\sqrt{a^2+n^2}\,n}{a^2+n^2}}\,n$$

$$n\,\delta_n = \sqrt{\frac{\left(2a^2+2n^2-2\sqrt{a^2+n^2}\,n\right)n^2}{a^2+n^2}}$$

$$n\,\delta_n = \sqrt{\frac{2a^2+2n^2-2\sqrt{a^2+n^2}\,n}{\frac{a^2}{n^2}+1}}$$

poniamo :

$$\tau_n = 2a^2+2n^2-2\sqrt{a^2+n^2}\,n$$

$$\tau_n = \frac{\left(2\left[a^2+n^2-\sqrt{a^2+n^2}\,n\right]\right)\left(a^2+n^2+\sqrt{a^2+n^2}\,n\right)}{a^2+n^2+\sqrt{a^2+n^2}\,n}$$

$$\tau_n = \frac{2\frac{a^4}{n^2}+2a^2}{\sqrt{\frac{a^2}{n^2}+1}+\frac{a^2}{n^2}+1}$$

che, per n tendente a infinito, tende a :

$$\frac{2a^2}{\sqrt{1}+1} = a^2$$

Gli stessi passi svolti nelle dimostrazioni precedenti valgono identicamente sostituendo ad a il generico termine di una successione a_n tendente ad a .

Funzioni circolari e $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

$$e^{i\,x} = \lim_{n = \infty} \left[\left(1 + \frac{i}{n} x \right)^{n} \right]$$

$$\cos(x) = \mathrm{Re}\left(e^{i\,x}\right) \qquad \cos(x) = \lim_{n = \infty} \left[\mathrm{asc}(E[x,n]) \right]$$

$$\sin(x) = \mathrm{Im}\left(e^{i\,x}\right) \qquad \sin(x) = \lim_{n = \infty} \left[\mathrm{ord}(E[x,n]) \right]$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \tan(x) = \lim_{n = \infty} \left[\frac{\mathrm{ord}(E[x,n])}{\mathrm{asc}(E[x,n])} \right]$$

approssimazioni

$n = 100 \qquad x = 3$

$\mathrm{asc}(E[x,n]) = -0.98987$

$\cos(x) = -0.98999$

$\mathrm{ord}(E[x,n]) = 0.14201$

$\sin(x) = 0.14112$

$\frac{\mathrm{ord}(E[x,n])}{\mathrm{asc}(E[x,n])} = -0.14346$

$\tan(x) = -0.14255$

Limite notevole

$$\lim_{x = 0} \left[\frac{\sin(x)}{x} \right] = 1$$

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

$x = 0.6$ $n = 3$ circonferenza $= 0$ segmentoX $= 0$

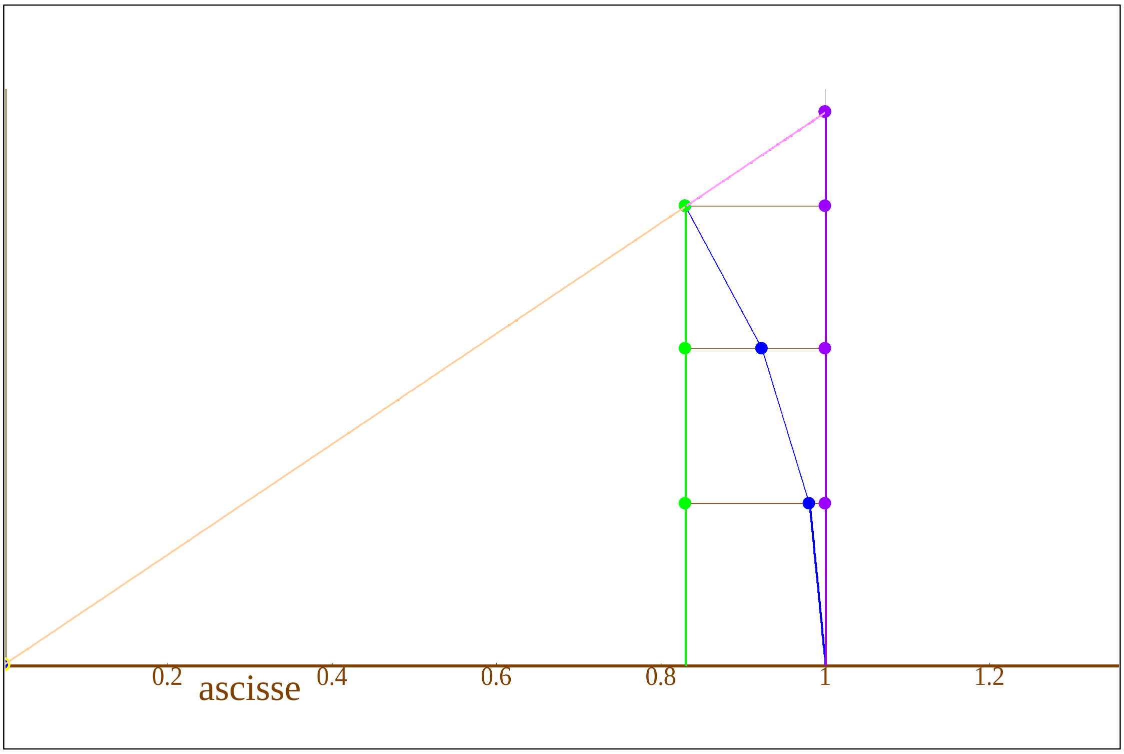
lunghezza della poligonale : $\lambda(x,n)n = 0.59123$

approssimazione del seno : $\operatorname{ord}(E[x,n]) = 0.55818$

$\sin(x) = 0.56464$

approssimazione della tangente : $\dfrac{\operatorname{ord}(E[x,n])}{\operatorname{asc}(E[x,n])} = 0.67273$

$\tan(x) = 0.68414$



$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \textbf{quindi :} \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

quando x tende a zero cos x tende ad 1 , quindi anche $\dfrac{x}{\sin x}$ **tende ad 1**

Funzione esponenziale in generale

definizione e calcolo

$$z = x + y\,i$$

$$e^{z} = \lim_{n}\left(\left[1+\frac{z}{n}\right]^{n}\right)$$

$$e^{z} = \lim_{n}\left(\left[\frac{x + i\,y}{n} + 1\right]^{n}\right)$$

$$e^{z} = \lim_{n}\left(\left[\frac{x}{n} + \frac{i\,y}{n} + 1\right]^{n}\right)$$

$$e^{z} = \lim_{n}\left(\left[1+\frac{x}{n}\right]^{n}\right)\lim_{n}\left(\left[1+\frac{i\,y}{n}\right]^{n}\right)$$

$$e^{x} = \lim_{n}\left(\left[1+\frac{x}{n}\right]^{n}\right)$$

$$e^{i\,y} = \lim_{n}\left(\left[1+\frac{i\,y}{n}\right]^{n}\right)$$

$$e^{i\,y} = \cos(y) + i\sin(y)$$

$$\lim_{n}\left(\left[\frac{i\,y}{n} + 1\right]^{n}\right) = \cos(y) + i\sin(y)$$

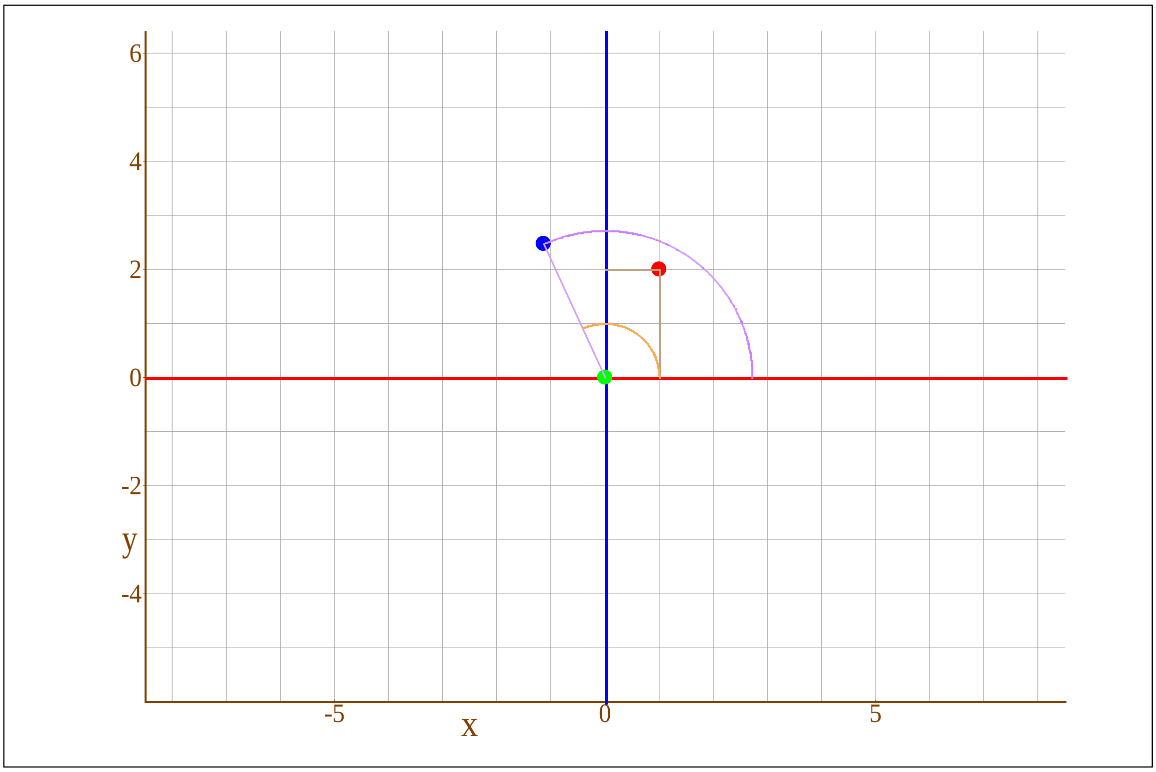
$$e^{z} = e^{x}\lim_{n}\left(\left[\frac{i\,y}{n} + 1\right]^{n}\right)$$

$$e^{z} = (\cos[y] + i\sin[y])e^{x}$$

$$e^{z} = e^{x}(\cos[y] + i\sin[y])$$

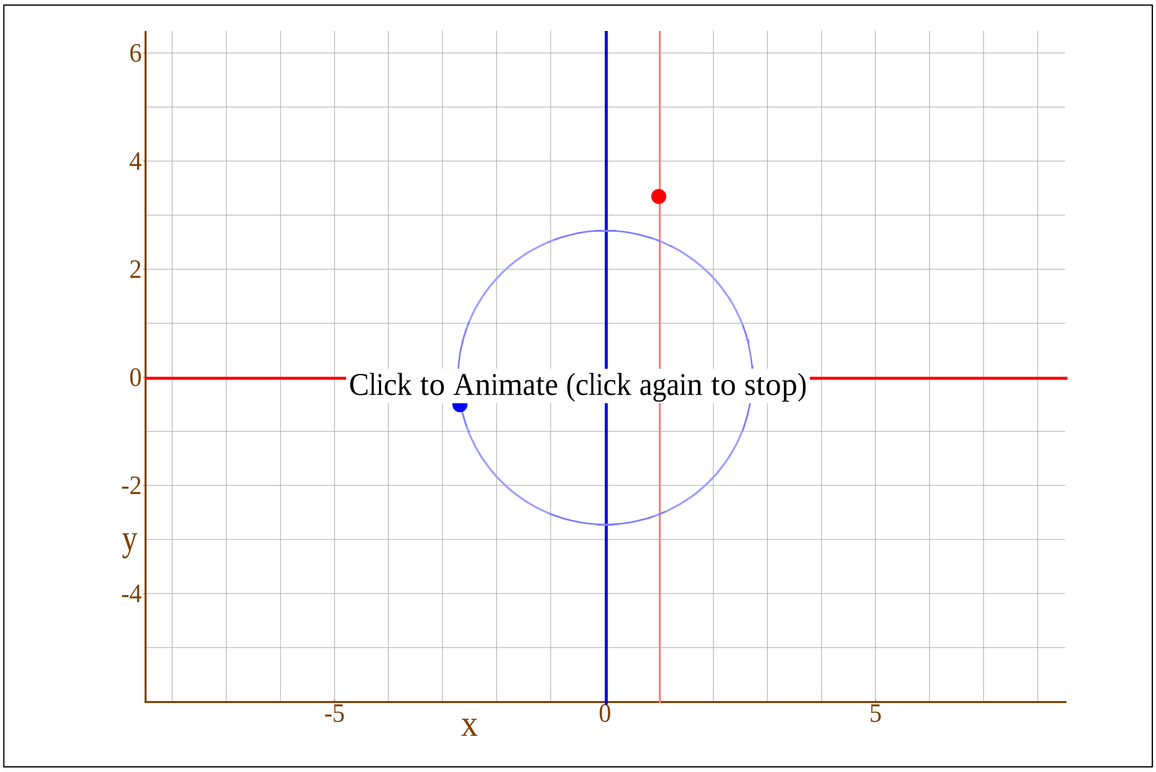
variazione di $e^{x + iy}$

$x = 1$ $\qquad$ $y = 2$



variazione di $e^{x + iy}$ con x costante e y variabile

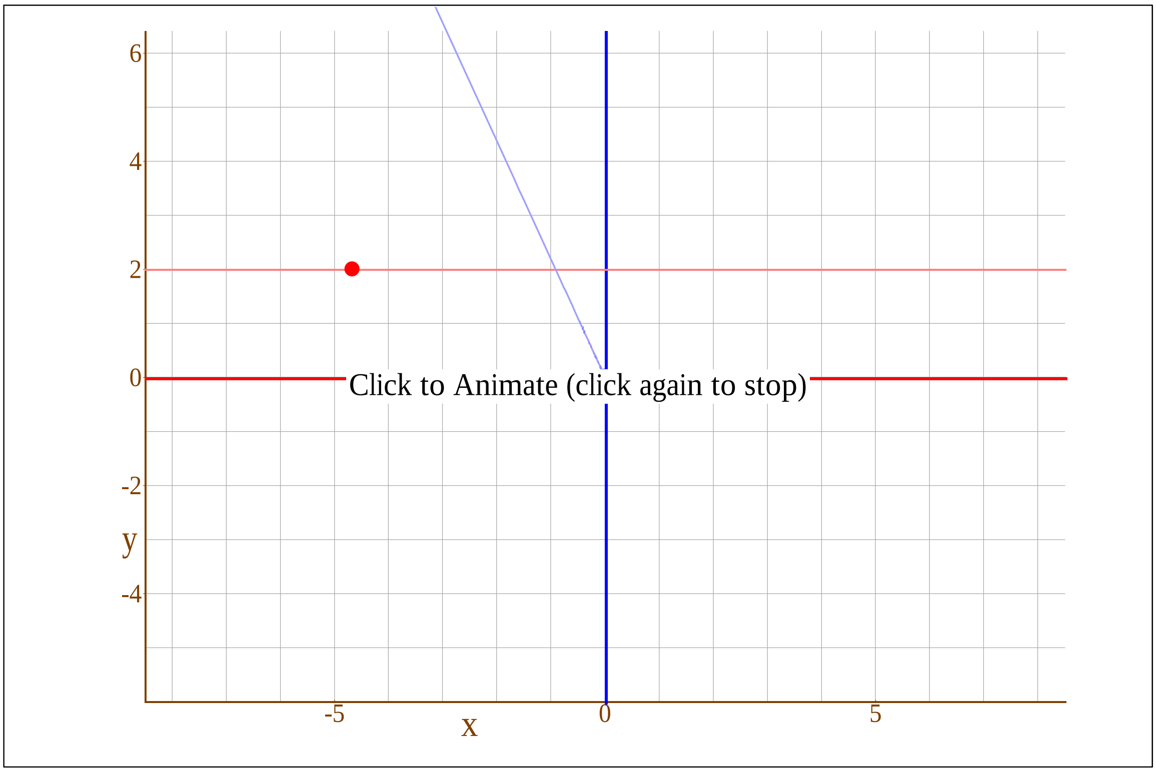
$x = 1$



Animate this graph for $y = -5 \dots 5$ in steps of $\frac{1}{3}$ for a total of 30 frames in a cycle at 6 frames/second.

variazione di $e^{x + iy}$ con x variabile e y costante

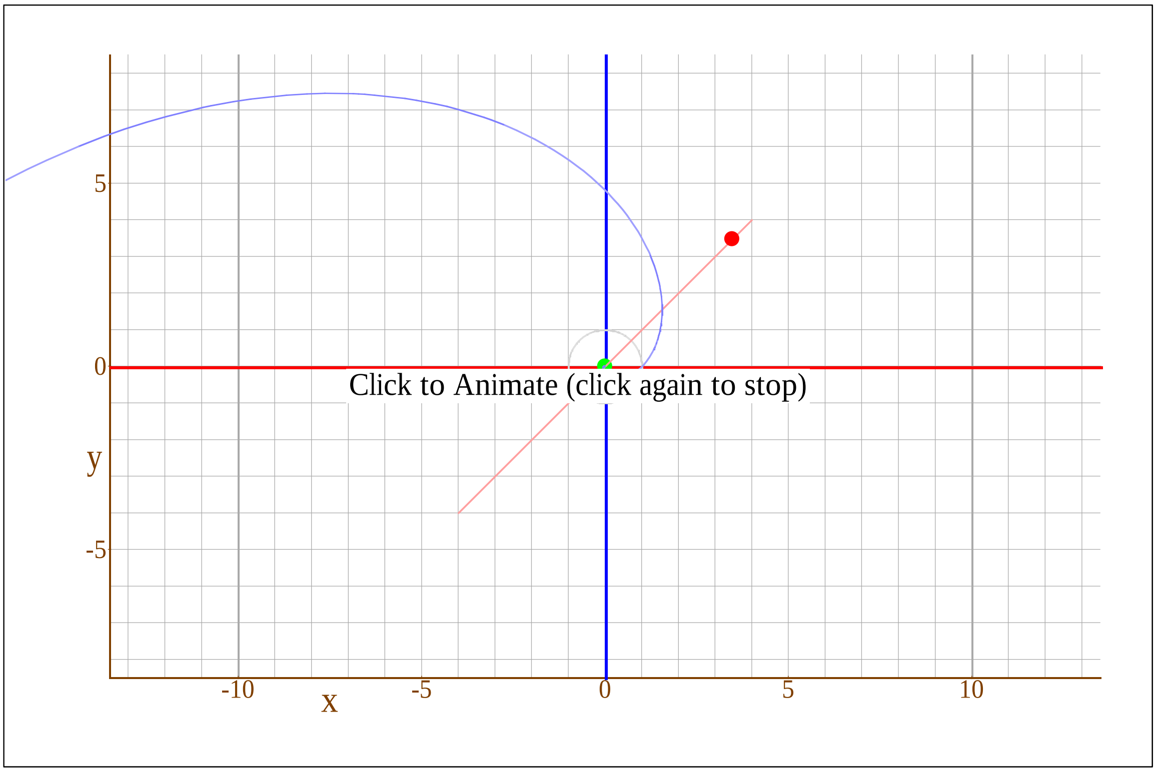
$y = 2$



Animate this graph for $x = -5 \dots 5$ in steps of $\frac{1}{3}$ for a total of 30 frames in a cycle at 6 frames/second.

variazione di $e^{x + iy}$ con (x,y) variabile su una retta passante per l'origine

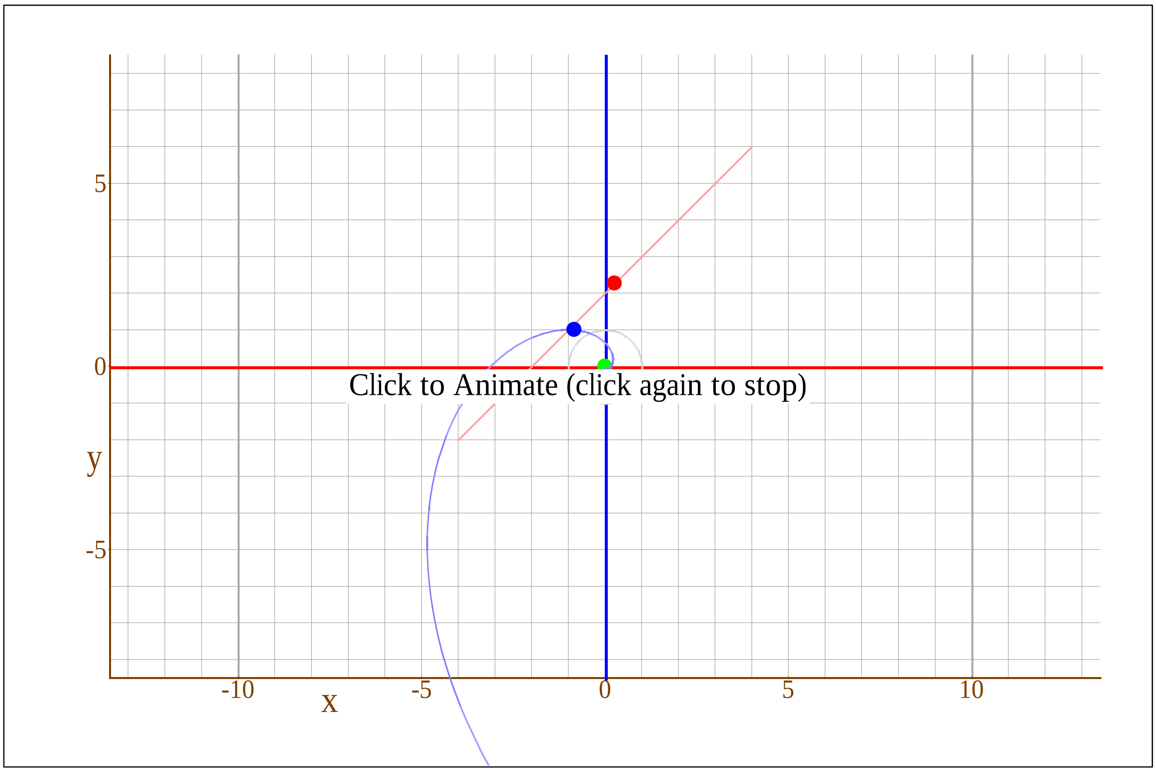
$a = 1 \qquad b = 1$



Animate this graph for $t = -4\ldots 4$ in steps of $\frac{4}{15}$ for a total of 30 frames in a cycle at 2 frames/second.

variazione di $e^{x + iy}$ con (x,y) variabile su una retta <u>non</u> passante per l'origine

$a = 1 \qquad b = 1 \qquad q = 2$



Animate this graph for $t = -4\ldots 4$ in steps of $\frac{4}{15}$ for a total of 30 frames in a cycle at 2 frames/second.