

# LA FORMULA DI EULERO : $e^{ia} = \cos(a) + i \sin(a)$

**Gaetano Speranza - I.T.I.S. Galileo Galilei , Roma**

**Approssimazione dell'arco di lunghezza a**

**Punti di Nepero e loro normalizzati**

**numeri (complessi) di Nepero :**

$$\aleph(t, n, k) = \left(1 + \frac{t i}{n}\right)^k$$

**punti di Nepero :**

$$P(t, n, k) = \text{punto}(\aleph[t, n, k])$$

**punti unitari di Nepero**

$$U(t, n, k) = \frac{P(t, n, k)}{|P(t, n, k)|}$$

**(punti normalizzati) :**

**lato della poligonale di Eulero :**

$$\lambda(t, n) = |U(t, n, 1) - (1, 0)|$$

**punto approssimante di Eulero :**

$$E(t, n) = U(t, n, n)$$

**dati**

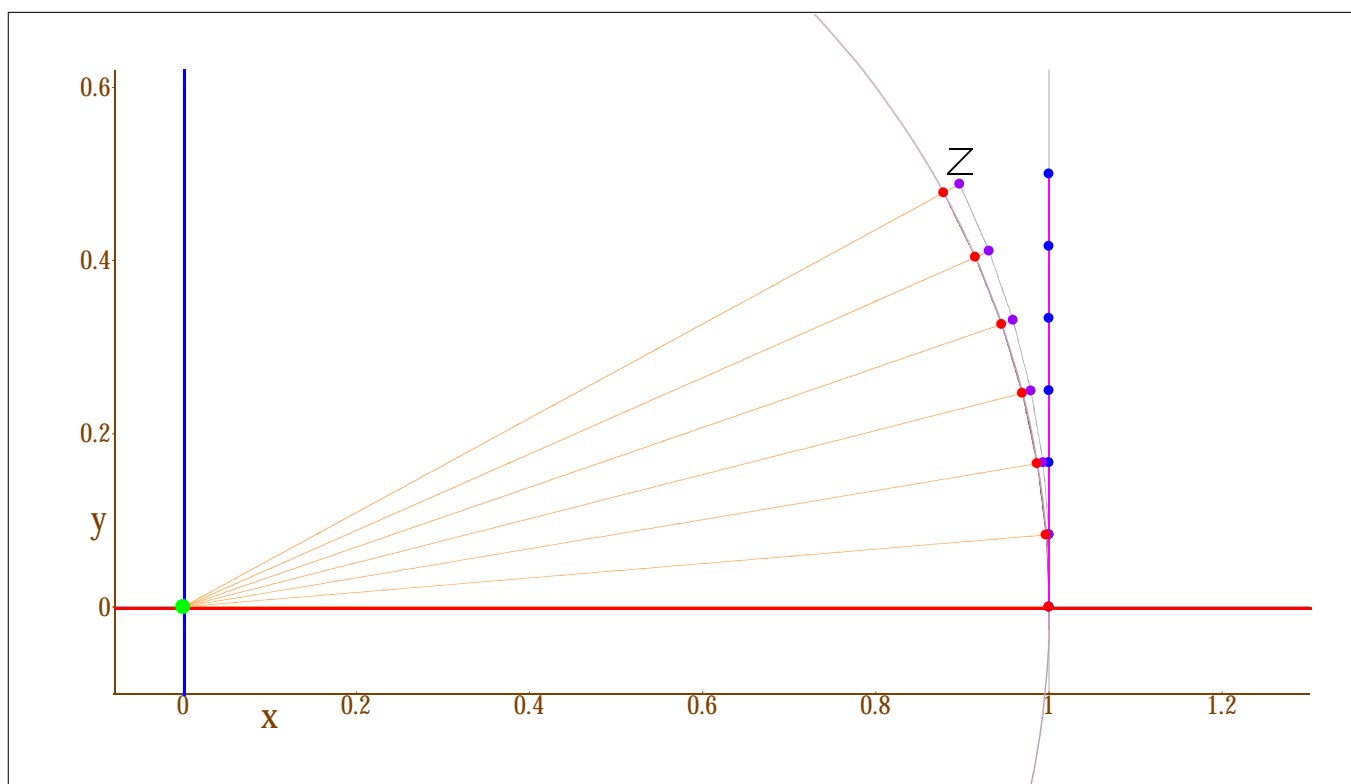
$$a = 0.5$$

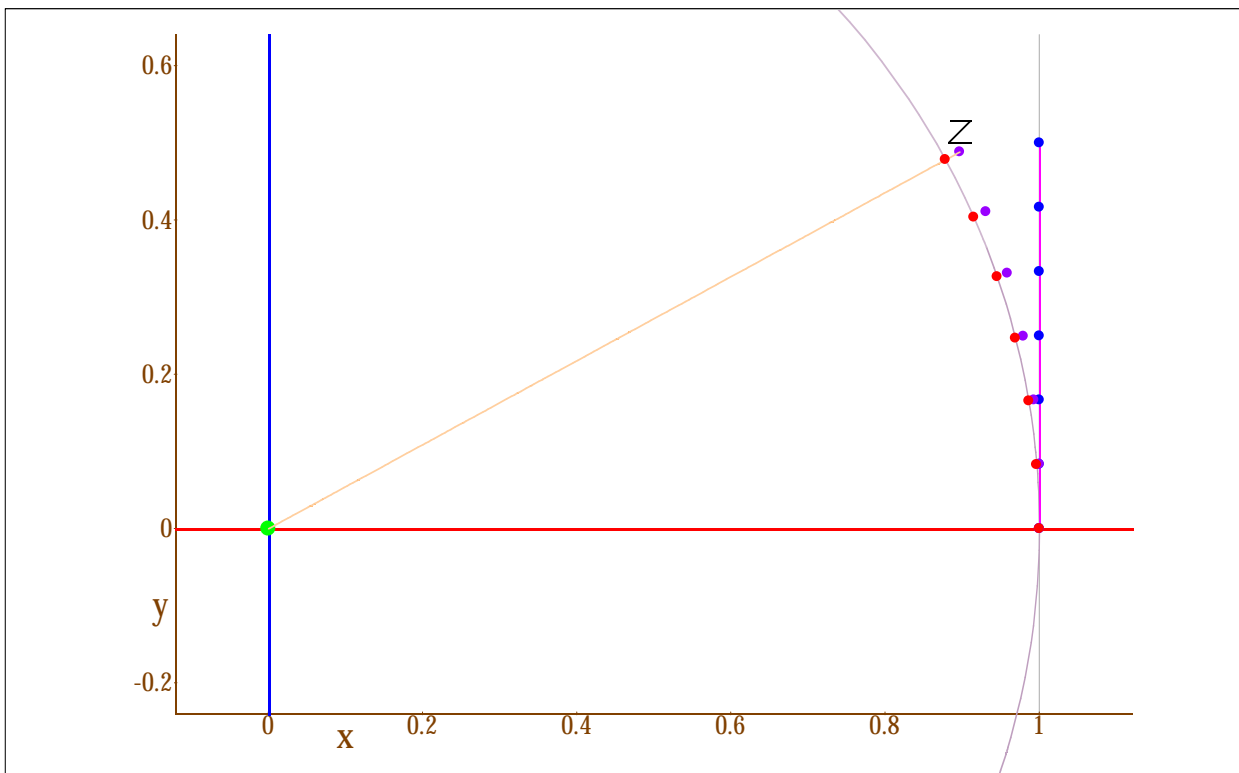
$$n = 6$$

$$z = \left(1 + \frac{a i}{n}\right)^n$$

$$z = \left(1 + \frac{0.5i}{6}\right)^6$$

**figura con raggi e connessioni**

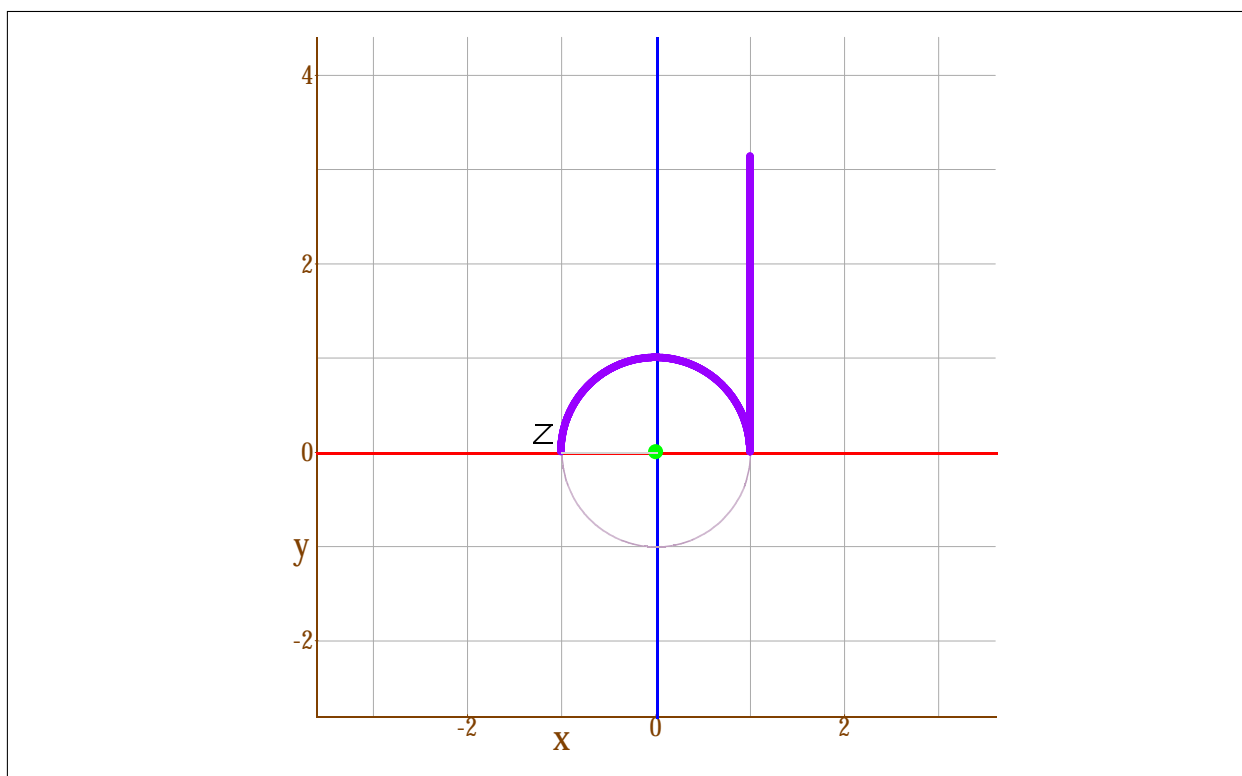




**Prendiamo n alto e valutiamo la lunghezza della semicirconferenza goniometrica**

visualizzazione di  $\left(1 + \frac{a}{n} i\right)^k$  per  $k = 0, \dots, n$

$a = 3.14$       $n = 1000$



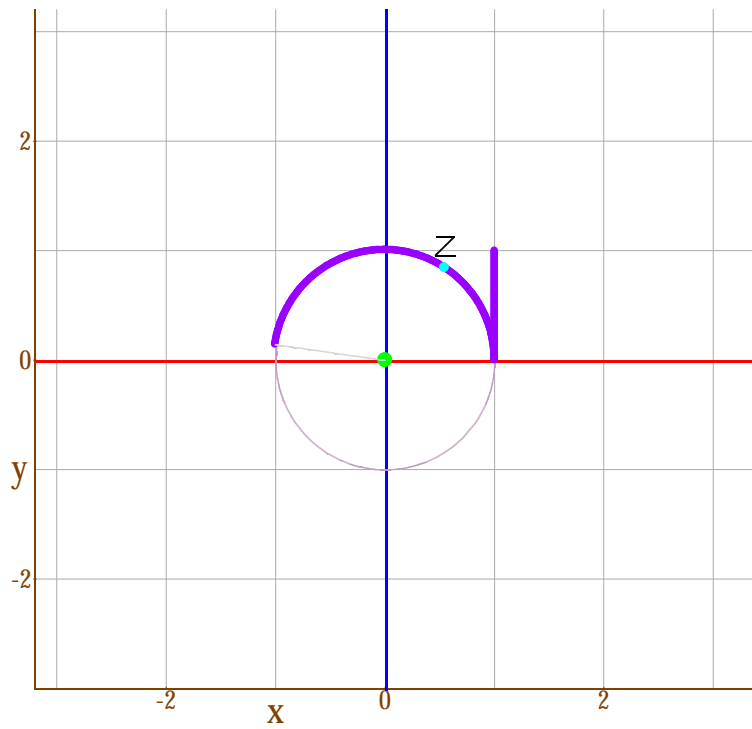
visualizzazione di  $\left(1 + \frac{1}{n}i\right)^k$  per  $k = 0, \dots, N$

$$a = 1 \quad n = 100 \quad h = 3 \quad N = h n$$

$$z' = \left(1 + \frac{a}{n}i\right)^k \quad z' = \left(1 + \frac{1}{n}i\right)^k$$

$$k = N \left[ z' = \left( \left( z' \right)_{k=n} \right)^h$$

$$k = N \left[ z' = \left( \left( z' \right)_{k=n} \right)^3$$



## Determinazione della lunghezza dell'arco

Intanto verifichiamo che la successione degli  $n$ -esimi (ossia finali) punti di Nepero di ordine  $n$  :

$$w_n = \left(1 + \frac{a}{n}i\right)^n$$

tende, per  $n$  tendente ad infinito, allo stesso limite cui tende la successione dei punti finali normalizzati :

$$v_n = \frac{w_n}{|w_n|} = \frac{\left(\frac{a}{n}i + 1\right)^n}{\left|\left(\frac{a}{n}i + 1\right)^n\right|}$$

Mostriamo che infatti il denominatore  $|w_n|$  tende ad 1 :

$$|w_n| = \left|\left(\frac{a}{n}i + 1\right)^n\right|$$

$$|w_n| = \left|1 + \frac{a}{n}i\right|^n$$

$$|w_n| = \sqrt{\left(\frac{a}{n}\right)^2 + 1}^n$$

$$|w_n| = \left(\left[\frac{a}{n}\right]^2 + 1\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$|w_n| = \left(\frac{a^2}{n^2} + 1\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$|w_n| = \left(\frac{\frac{a^2}{n}}{n} + 1\right)^{\frac{1}{n}}$$

il numeratore  $\frac{a^2}{n}$  tende a 0, quindi  $|w_n|$  tende a  $e^0 = 1$ .

Primo punto di Nepero normalizzato di ordine  $n$  e sua distanza da 1

$$z_n = \frac{1 + \frac{a}{n}i}{\left|1 + \frac{a}{n}i\right|}$$

$$z_n = \frac{1 + \frac{a}{n}i}{\sqrt{\left(\frac{a}{n}\right)^2 + 1}}$$

$$z_n = \frac{1 + \frac{a}{n}i}{\sqrt{\frac{a^2}{n^2} + 1}}$$

$$z_n = \frac{1 + \frac{a}{n}i}{\sqrt{\frac{a^2 + n^2}{n^2}}}$$

$$z_n = \frac{1 + \frac{a}{n}i}{\frac{\sqrt{a^2 + n^2}}{n}}$$

$$z_n = \frac{n}{\sqrt{a^2 + n^2}} + \frac{a i}{\sqrt{a^2 + n^2}}$$

$$\delta_n = |z_n - 1|$$

$$\delta_n = \left| \frac{n}{\sqrt{a^2 + n^2}} + \frac{a i}{\sqrt{a^2 + n^2}} - 1 \right|$$

$$\delta_n = \left| \frac{n}{\sqrt{a^2 + n^2}} - 1 + \frac{a i}{\sqrt{a^2 + n^2}} \right|$$

$$\delta_n = \left| \frac{-\sqrt{a^2 + n^2} + n + a i}{\sqrt{a^2 + n^2}} \right|$$

$$\delta_n = \frac{|-\sqrt{a^2 + n^2} + n + a i|}{\sqrt{|a^2 + n^2|}}$$

$$\delta_n = \frac{|-\sqrt{a^2 + n^2} + n + a i|}{\sqrt{a^2 + n^2}}$$

$$\delta_n = \frac{\sqrt{(-\sqrt{a^2 + n^2} + n)^2 + a^2}}{\sqrt{a^2 + n^2}}$$

$$\delta_n = \sqrt{\frac{(-\sqrt{a^2 + n^2} + n)^2 + a^2}{a^2 + n^2}}$$

$$\delta_n = \sqrt{\frac{2a^2 + 2n^2 - 2\sqrt{a^2 + n^2}n}{a^2 + n^2}}$$

$n \delta_n$  tende ad  $a$  per  $n$  tendente ad infinito

$$n \delta_n = \sqrt{\frac{2a^2 + 2n^2 - 2\sqrt{a^2 + n^2}n}{a^2 + n^2}} n$$

$$n \delta_n = \sqrt{\frac{(2a^2 + 2n^2 - 2\sqrt{a^2 + n^2}n)n^2}{a^2 + n^2}}$$

$$n \delta_n = \sqrt{\frac{2a^2 + 2n^2 - 2\sqrt{a^2 + n^2}n}{\frac{a^2}{n^2} + 1}}$$

poniamo :

$$\tau_n = 2a^2 + 2n^2 - 2\sqrt{a^2 + n^2}n$$

$$\tau_n = \frac{(2[a^2 + n^2 - \sqrt{a^2 + n^2}n])(a^2 + n^2 + \sqrt{a^2 + n^2}n)}{a^2 + n^2 + \sqrt{a^2 + n^2}n}$$

$$\tau_n = \frac{2\frac{a^4}{n^2} + 2a^2}{\sqrt{\frac{a^2}{n^2} + 1} + \frac{a^2}{n^2} + 1}$$

che, per n tendente a infinito, tende a :

$$\frac{2a^2}{\sqrt{1} + 1} = a^2$$

**Gli stessi passi svolti nelle dimostrazioni precedenti valgono identicamente sostituendo ad a il generico termine di una successione a<sub>n</sub> tendente ad a .**



$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

$x = 0.6$        $n = 3$       circonferenza = 0      segmento  $X = 0$

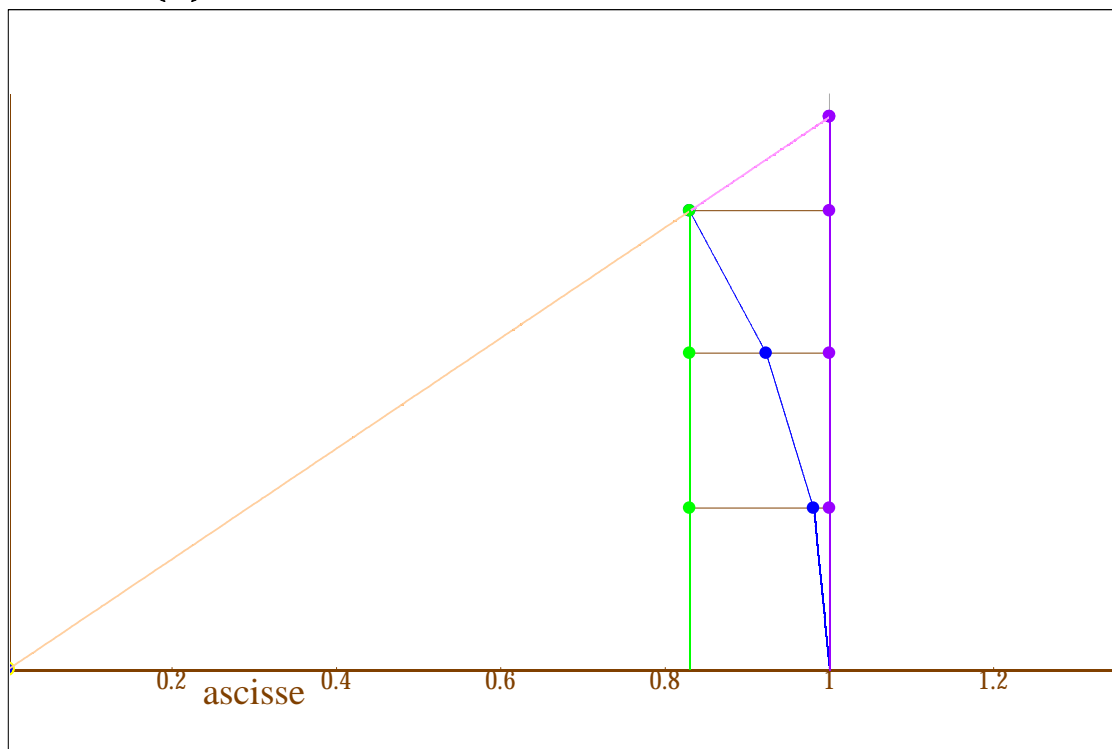
**lunghezza della poligonale :**       $\lambda(x, n)n = 0.59123$

**approssimazione del seno :**       $\text{ord}(E[x, n]) = 0.55818$

$\sin(x) = 0.56464$

**approssimazione della tangente :**       $\frac{\text{ord}(E[x, n])}{\text{asc}(E[x, n])} = 0.67273$

$\tan(x) = 0.68414$



$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \text{quindi: } 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

quando  $x$  tende a zero  $\cos x$  tende ad 1, quindi anche  $\frac{x}{\sin x}$  tende ad 1

### Funzione esponenziale in generale

### definizione e calcolo

$$z = x + y i$$

$$e^z = \lim_n \left( \left[ 1 + \frac{z}{n} \right]^n \right)$$

$$e^z = \lim_n \left( \left[ \frac{x + i y}{n} + 1 \right]^n \right)$$

$$e^z = \lim_n \left( \left[ \frac{x}{n} + \frac{i y}{n} + 1 \right]^n \right)$$

$$e^z = \lim_n \left( \left[ 1 + \frac{x}{n} \right]^n \right) \lim_n \left( \left[ 1 + \frac{i y}{n} \right]^n \right)$$

$$e^x = \lim_n \left( \left[ 1 + \frac{x}{n} \right]^n \right)$$

$$e^{i y} = \lim_n \left( \left[ 1 + \frac{i y}{n} \right]^n \right)$$

$$e^{i y} = \cos(y) + i \sin(y)$$

$$\lim_n \left( \left[ \frac{i y}{n} + 1 \right]^n \right) = \cos(y) + i \sin(y)$$

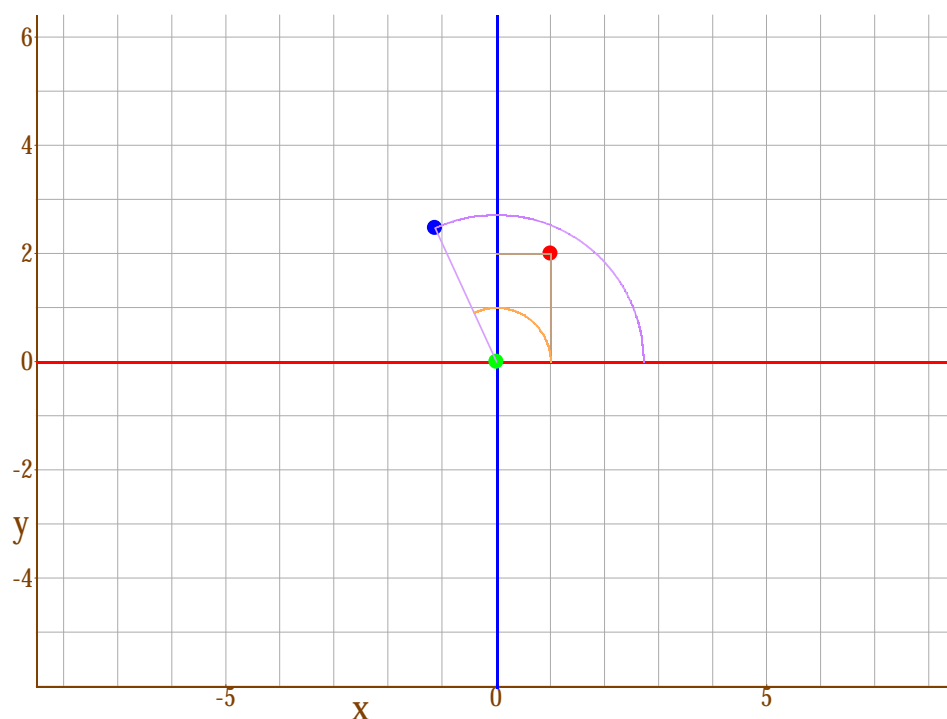
$$e^z = e^x \lim_n \left( \left[ \frac{i y}{n} + 1 \right]^n \right)$$

$$e^z = (\cos[y] + i \sin[y]) e^x$$

$$e^z = e^x (\cos[y] + i \sin[y])$$

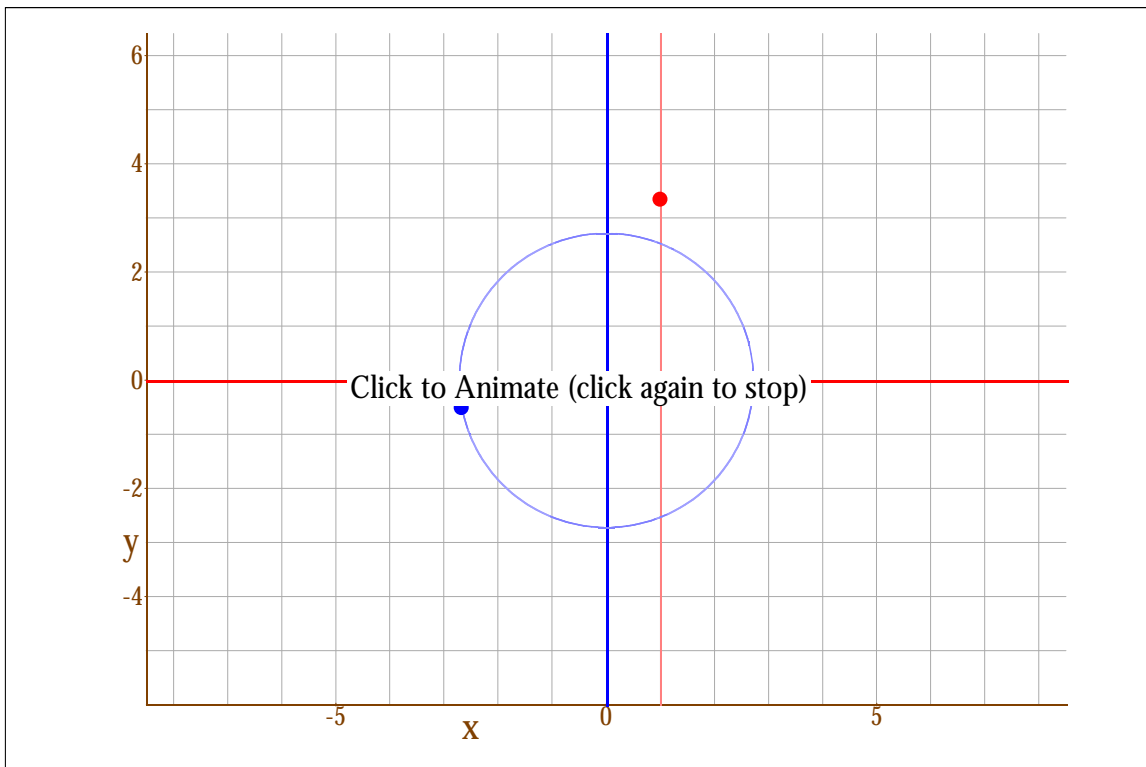
### variazione di $e^{x+iy}$

$$x = 1 \quad y = 2$$



variazione di  $e^{x+iy}$  con  $x$  costante e  $y$  variabile

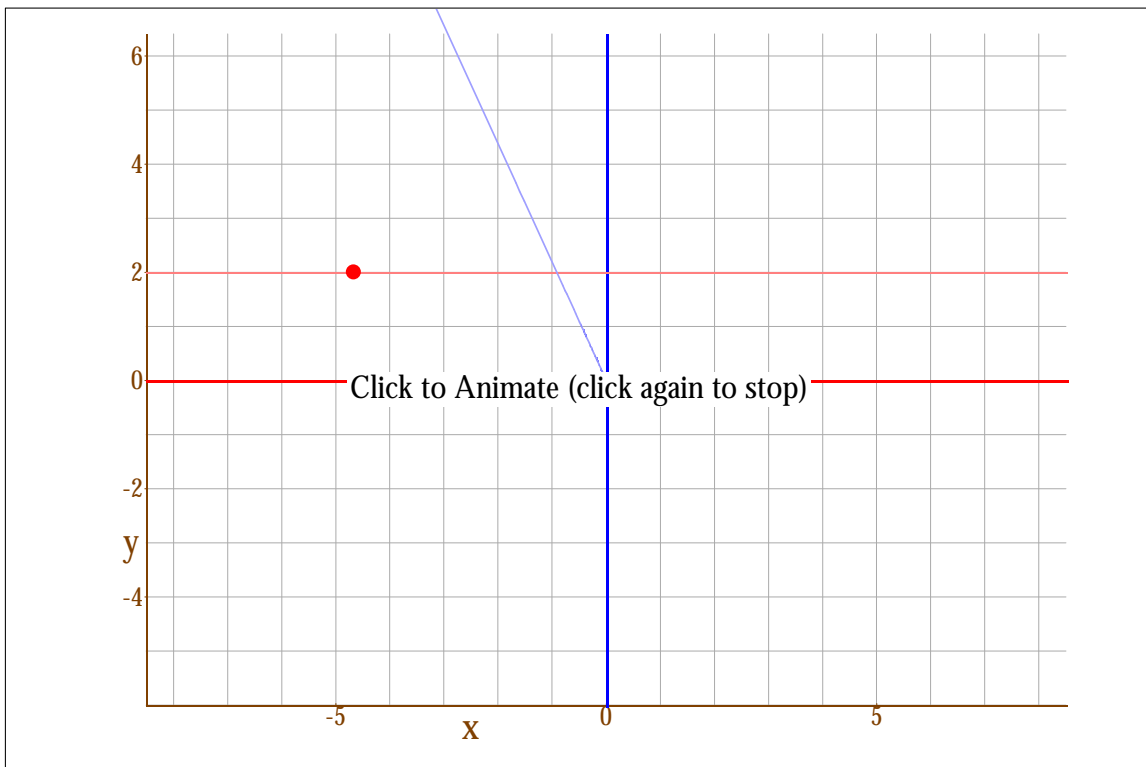
$x = 1$



Animate this graph for  $y = -5 \dots 5$  in steps of  $\frac{1}{3}$  for a total of 30 frames in a cycle at 6 frames/second .

variazione di  $e^{x+iy}$  con  $x$  variabile e  $y$  costante

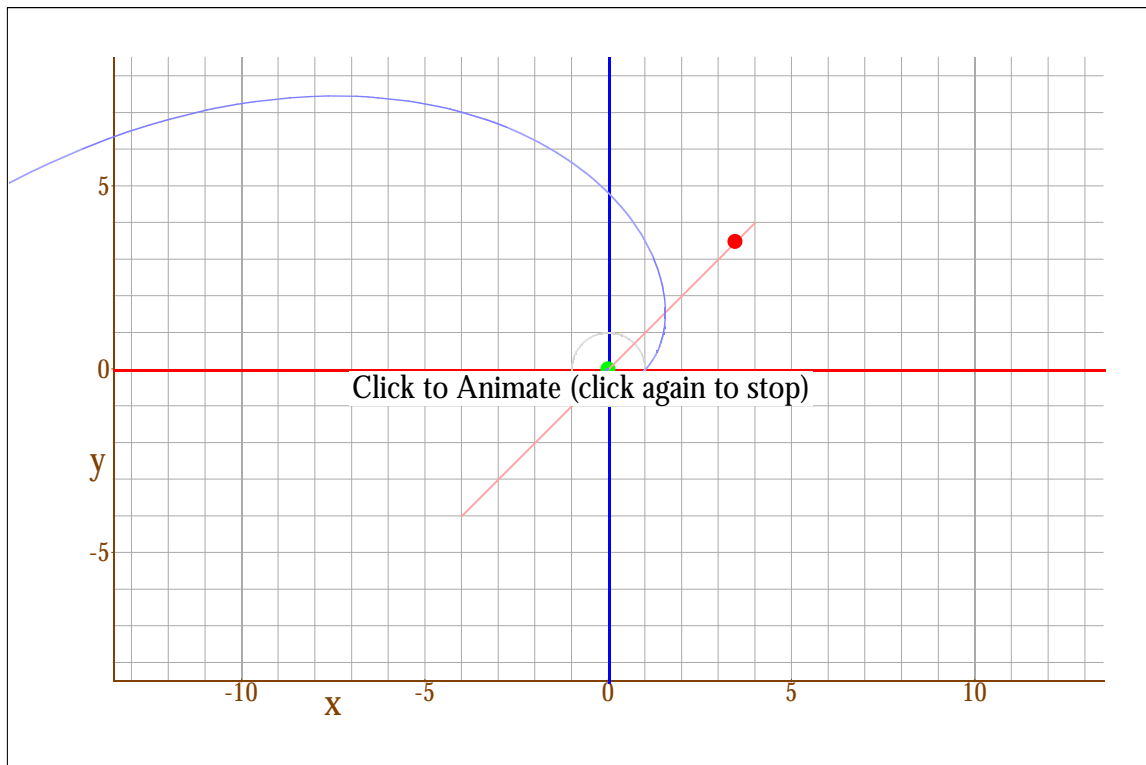
$y = 2$



Animate this graph for  $x = -5 \dots 5$  in steps of  $\frac{1}{3}$  for a total of 30 frames in a cycle at 6 frames/second .

variazione di  $e^{x+iy}$  con  $(x,y)$  variabile su una retta passante per l'origine

$a = 1$        $b = 1$

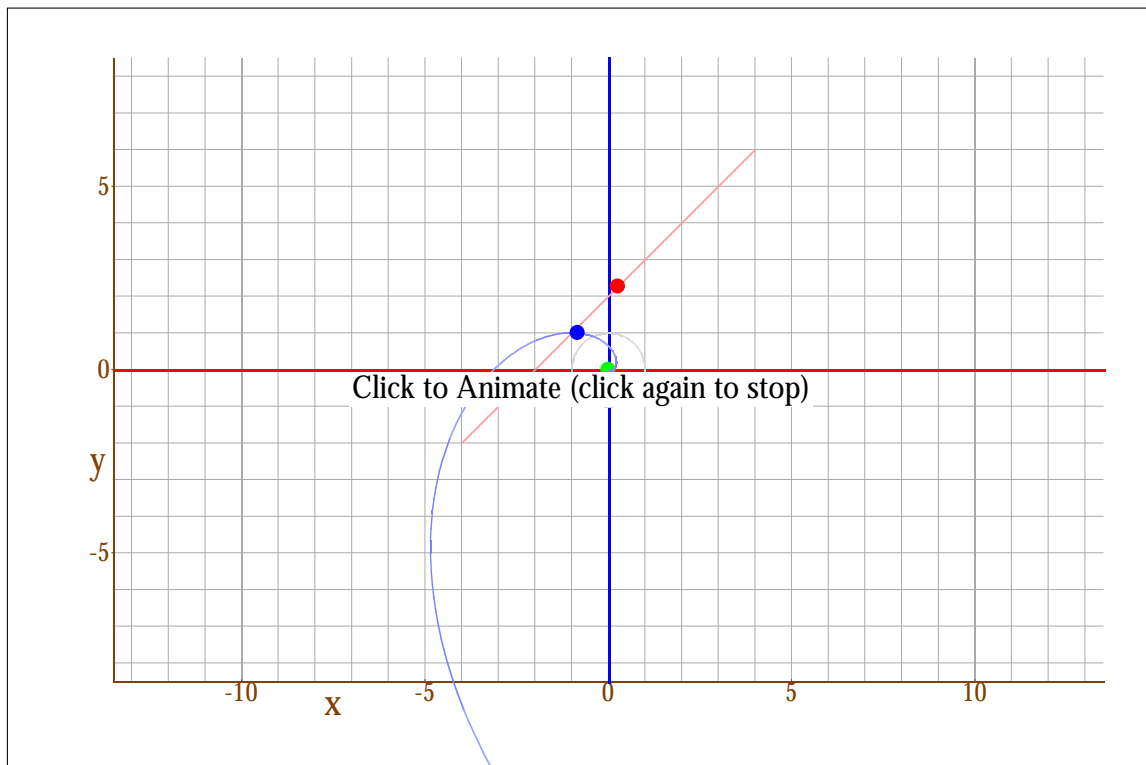


Animate this graph for  $t = -4 \dots 4$  in steps of  $\frac{4}{15}$  for a total of 30 frames  in a cycle at

2 frames/second .

variazione di  $e^{x+iy}$  con  $(x,y)$  variabile su una retta non passante per l'origine

$a = 1$        $b = 1$        $q = 2$



Animate this graph for  $t = -4 \dots 4$  in steps of  $\frac{4}{15}$  for a total of 30 frames  in a cycle at

2 frames/second .